Geometría

Una visión de la planimetría

LUMBRE

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES

Solucionario
Geometría
una visión de la planimetría

LUMBRERAS
Editores

SOLUCIONARIO Geometría, una visión de la Planimetría

Autor	:	Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Editor	:	Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Diseño gráfico	:	Área de cómputo y publicaciones de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Jr. República de Portugal N.º 187 - Breña. Lima-Perú. Telefax: 332-3786
Para su sello editorial **Lumbreras Editores**
Página web: www.elumbreras.com.pe
Primera edición: agosto de 2009
Tiraje: 5000 ejemplares
ISBN: 978-612-4036-74-3
Registro del proyecto editorial N.º 31501130800275
"Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú"
N.° 2009-10339

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la
Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de agosto de 2009
Calle de las Herramientas N.º 1873 - Lima-Perú. Teléfono: 336-5889

Presentación

Asociación Fondo de Investigadores y Editores (AFINED), promotora de Lumbreras Editores, tiene el agrado de presentar el **Solucionario Geometría, una visión de la planimetría**, libro que forma parte de una nueva serie de publicaciones que aportan al desarrollo dinámico de los contenidos educativos que brindamos a la sociedad, sobre todo en un contexto en el que la enseñanza de las ciencias y las humanidades ha ido perdiendo su valor analítico-crítico.

Esta serie de solucionarios es el complemento ideal para los libros de la colección de Ciencias y Humanidades, trabajo desarrollado por Lumbreras Editores en conjunto con las planas de profesores del **Instituto de Ciencias y Humanidades** –promotor de las academias ADUNI y César Vallejo–, quienes se han dedicado durante generaciones a formar estudiantes con criterio realista y capacidad analítica, además de impartir conocimientos objetivos y de rigor científico a través de las publicaciones de Lumbreras Editores con una sólida presencia en los diversos lugares del Perú, cumpliendo así una tarea vital en el acercamiento de material bibliográfico de calidad a miles de estudiantes y profesores en todo el país. De esta manera reafirmamos nuestro compromiso firme de aportar en el desarrollo de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

El **Solucionario Geometría, una visión de la planimetría** presenta el desarrollo didáctico de cada uno de los problemas propuestos del libro **Geometría, una visión de la planimetría**, y ofrece un acercamiento dinámico a todos los contenidos necesarios para obtener dominio del curso. Este libro es también un recorrido a través de lineamientos metodológicos que anhelan construir puentes sólidos entre el estudiante y el aprendizaje de esta materia.

La búsqueda por aportar publicaciones más didácticas y novedosas ha hecho posible este libro y la serie de solucionarios que le seguirán en el campo de las ciencias; también revela nuestro compromiso profesional de seguir impulsando un trabajo editorial y académico que no esté alejado de las grandes mayorías. Lumbreras Editores quiere reconocer el esfuerzo conjunto que ha significado esta publicación, en la cual ha participado un gran grupo de profesionales de primer nivel, cuyo esfuerzo es un apoyo fundamental a nuestro anhelo de conseguir una educación científica y humanística integral. Finalmente, deseamos reconocer el apoyo de la plana de Geometría de las academias ADUNI y César Vallejo, por su labor en la elaboración de este material, gracias a su valiosa trayectoria en la enseñanza preuniversitaria de calidad. De manera especial, AFINED desea agradecer a los profesores Roger Joel Chipana Mayhua y Solimar Félix Flores Espíritu por su trabajo profesional en la sistematización del presente libro.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES

Prólogo

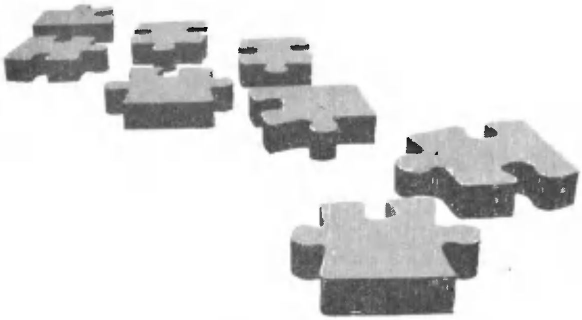
La resolución de problemas matemáticos es sin duda uno de los retos a los que se enfrentan a menudo los estudiantes, pues no solo tienen que conocer los teoremas necesarios para resolverlos, sino que también deben educarse en la práctica de saber cuándo es apropiado utilizarlos. Por ello, con el **Solucionario Geometría, una visión de la planimetría** buscamos complementar la capacidad de interpretación y análisis de los estudiantes, y así brindarles las herramientas necesarias que les ayudarán a entender a la Geometría de manera integral y dinámica.

En el trabajo realizado hemos apelado a soluciones directas, simples y didácticas, sin que esto signifique que dejen de ser ingeniosas. De esta manera, nuestros lectores encontrarán un atractivo formato y que los acercará a las diferentes áreas del curso de Geometría Plana.

A lo largo de los dieciocho capítulos que conforman este libro, están presentes las propiedades y teoremas necesarios para complementar la capacidad de resolver problemas matemáticos. Con ello, proponemos no solo un recorrido dinámico a través de los temas del curso, sino también una metodología que plantea problemas prácticos, cercanos a la realidad cotidiana.

Todo el esfuerzo realizado en esta publicación ha tenido por objetivo hacer de este libro un material de consulta invaluable para estudiantes escolares, preuniversitarios y universitarios, así como para los profesores del curso de Geometría y todos aquellos que deseen desarrollar su capacidad para el análisis geométrico.

Los autores



Índice

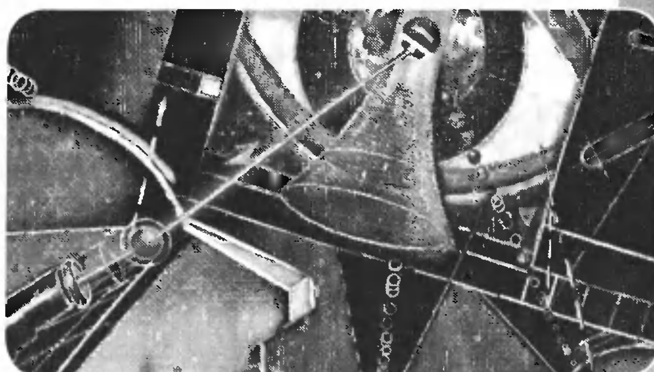
índice

Página

Capítulo

2

Conceptos topológicos



Una manera de clasificar a las regiones o sólidos es de acuerdo a la clase de conjuntos que conforman sus puntos. En este capítulo vamos a analizar dichos conjuntos desde un punto de vista topológico.

La topología es probablemente la rama clásica más joven de las matemáticas y las primeras ideas que surgieron sobre ella se refieren al concepto de límite y al de completitud de un espacio métrico, ideas que surgieron en la crisis de los inconmensurables ante la aparición de los números reales no racionales. Con el método de exhaución de Arquímedes ocurre el primer acercamiento concreto al concepto de límite de una función, y con el problema de los puentes de Königsberg de Euler, en 1735 se considera que se dió origen a la topología, la cual está relacionada a muchos teoremas de la geometría, como el teorema de Euler en poliedros, la transformación de una figura en otra, etc. Asimismo, con el empleo de la respectiva definición analizaremos si el conjunto de puntos son conjuntos convexos, no convexos, conexos o inconexos.

Capítulo 2

Conceptos topológicos

PROBLEMA N.° 1

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La unión de dos segmentos consecutivos es siempre un conjunto convexo.

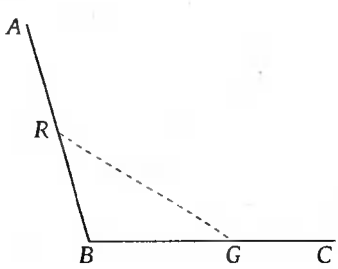
II. La región triangular, cuyo incentro se ha omitido, es un conjunto convexo.

III. Si a una línea recta AB se le extrae el punto A, la resultante es un conjunto convexo.

A) VVF B) FVF C) FVV
D) FFF E) FFV

Resolución

I. Falso



Sea $\overline{AB} \cup \overline{BC} = P$

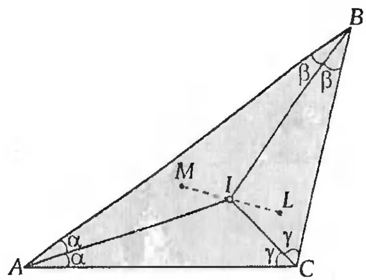
Del gráfico:

$R, G \in P$

$\overline{RG} \not\subset P$

Por lo tanto, P no es un conjunto convexo.

II. Falso



I: incentro del $\triangle ABC$

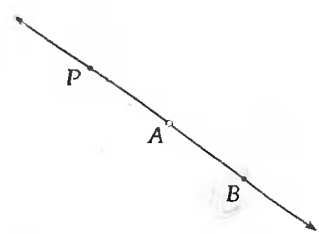
Sea $\triangle ABC - \{I\} = H$

$M, L \in H$

$\overline{ML} \not\subset H$

Por lo tanto, H no es un conjunto convexo.

III. Falso



$\overleftrightarrow{AB}$: recta AB

Sea $\overleftrightarrow{AB} - \{A\} = K$

$P, B \in K$; $\overline{PB} \not\subset K$

Por lo tanto, K no será conjunto convexo.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

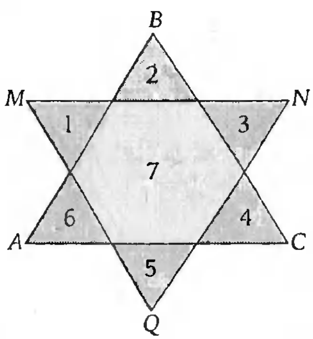
Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos regiones triangulares determinan como máximo siete conjuntos convexos disjuntos, al superponerse entre sí.
II. Un cilindro puede ser un conjunto convexo.
III. Si a una región triangular se le extrae una altura, la región que queda puede que sea un conjunto convexo.

A) FVV B) VFF C) FFV
D) VVF E) VVV

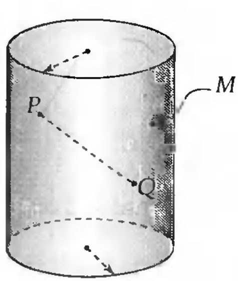
Resolución

I. **Verdadero**



Las regiones triangulares ABC y MNQ están superpuestas, determinando siete conjuntos convexos disjuntos.

II. **Verdadero**

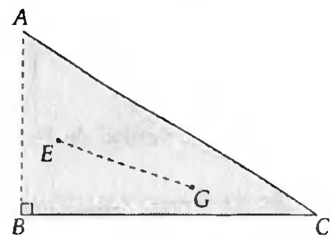


M: cilindro de revolución

$\forall\ P, Q \in M, \overline{PQ} \subset M$

Por lo tanto, M será un conjunto convexo; pero si la base es una región curva cóncava, el cilindro será un conjunto no convexo.

III. **Verdadero**



$\overline{AB}$: altura relativa a $\overline{BC}$ en el $\triangle ABC$

Sea $Q = \triangle ABC - \overline{AB}$

$\forall\ E, G \in Q, \overline{EG} \subset Q$

Por lo tanto, Q será conjunto convexo.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 3

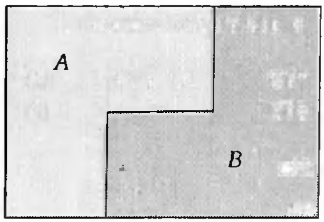
Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.
II. Toda reunión de dos conos de revolución, que tienen la misma base, es un conjunto convexo.
III. Sea una región triangular R de ortocentro H, $R-\{H\}$ es un conjunto no convexo.

A) VFF B) FVF
C) VVV
D) FVV E) FFF

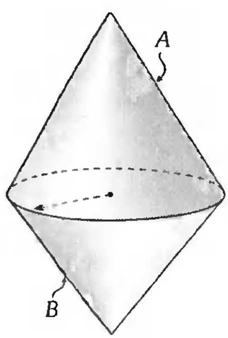
Resolución

I. Falso



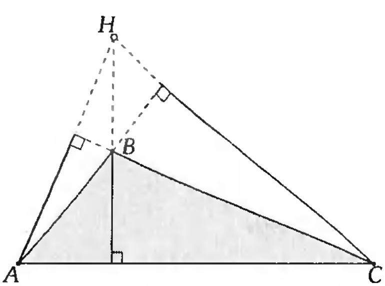
Siendo A y B conjuntos no convexos, notamos que $A \cup B$ es un conjunto convexo.

II. Verdadero



A y B: conos de revolución de base común
Sea $A \cup B = H$
$\forall\ P, Q \in H, \overline{PQ} \subset H$
Por lo tanto, H será un conjunto convexo.

III. Falso



H: ortocentro del $\triangle ABC$
R: región triangular ABC
Del gráfico:
$R - \{H\} = R$
Por lo tanto, $R - \{H\}$ es un conjunto convexo.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

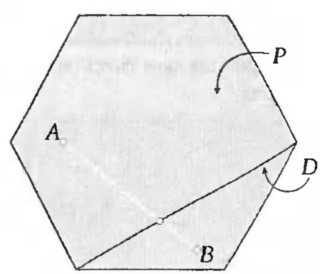
Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sea P un polígono regular de seis lados, unido con su región interior, y D una diagonal del polígono anterior, entonces $P - D$ es un conjunto convexo.
II. Una semirrecta es un conjunto convexo.
III. La superficie de una esfera es un conjunto convexo.

A) VFV B) FVF C) FFF
D) VVF E) VFF

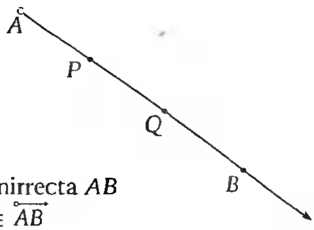
Resolución

I. Falso



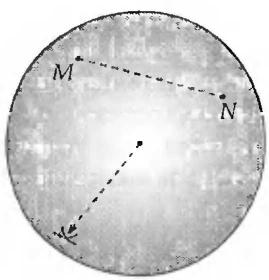
P: región poligonal regular de seis lados
D: diagonal de P
$A, B \in \{P - D\}$
$AB \not\subset \{P - D\}$
Por lo tanto, $\{P - D\}$ no es un conjunto convexo.

II. **Verdadero**



$\overrightarrow{AB}$: semirrecta AB
$\forall\, P, Q \in \overrightarrow{AB}$
$\overline{PQ} \subset \overrightarrow{AB}$
Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ es un conjunto convexo.

III. **Falso**



S: superficie esférica (vacío en su interior)
$M, N \in S$
$MN \not\subset S$
Por lo tanto, S no es conjunto convexo.

Nota

S: es la superficie que limita (envuelve) a una esfera (sólido).

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

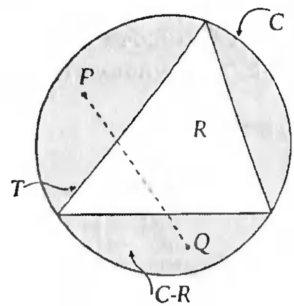
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un círculo C está inscrito un triángulo T. Si al círculo se le extrae la región interior del triángulo T, resulta un conjunto convexo.
II. La intersección de una recta secante con una corona circular puede ser conjunto convexo.
III. La intersección de dos regiones cuadriláteras es una región convexa.

A) FVF B) VVF C) FFF
D) VFF E) VVV

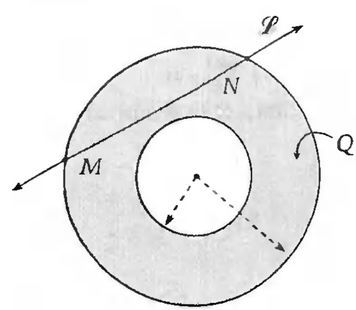
Resolución

I. **Falso**



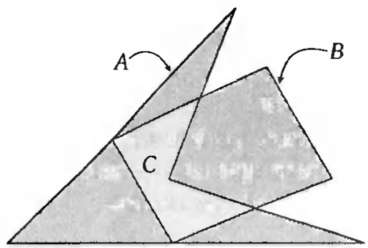
C: círculo
T: triángulo
R: región interior de T
Notamos que $C-R$ es conjunto no convexo.

II. **Verdadero**



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: recta $\mathscr{L}$
Q: corona circular
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap Q = \overline{MN}$
$\overline{MN}$: conjunto convexo

III. **Falso**



A y B: regiones cuadriláteras

$A \cap B = C$

Por lo tanto, C no es conjunto convexo.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Indique qué proposiciones son verdaderas o falsas:

I. Sea R_1 una región cuadrada y R_2 una región triangular, entonces $R_1 \cup R_2$ es un conjunto convexo.

II. Dos regiones triangulares al superponerse determinan como máximo seis regiones parciales convexas.

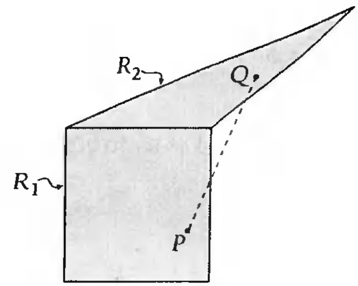
III. Si R_1 y R_2 son conjuntos no convexos, tales que $R_1 \cap R_2 \neq \phi$, entonces $(R_1 - R_2)$ no siempre es un conjunto no convexo.

A) FVF B) VFF C) FFV
D) FFV E) VVF

Resolución

I. **Falso**

Bastará que exista un solo caso en donde la unión ($\cup$) no sea un conjunto convexo como en el gráfico.

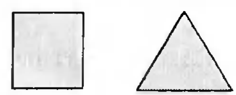


R_1: región cuadrada

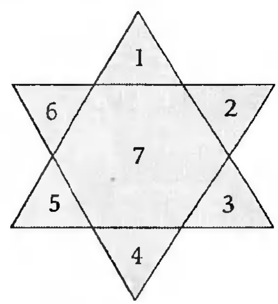
R_2: región triangular

$R_1 \cup R_2$: conjunto no convexo

Si los conjuntos son disjuntos, la unión de sus elementos es un conjunto no convexo.

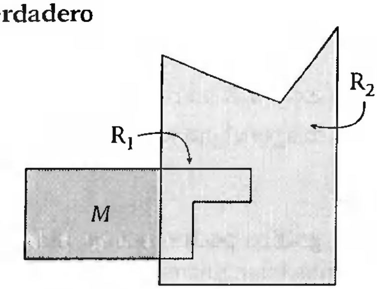


II. **Falso**



La superposición de dos regiones triangulares determina como máximo siete regiones parciales convexas.

III. **Verdadero**



R_1 y R_2: conjuntos no convexos

$R_1 \cap R_2 \neq \phi$

$R_1 - R_2 = M$

Por lo tanto, $(R_1 - R_2)$ es un conjunto convexo.

Clave D

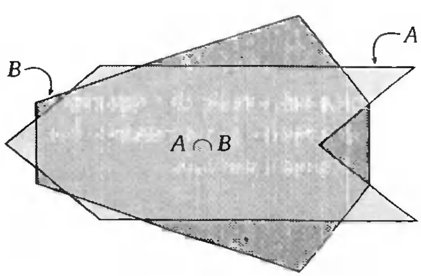
PROBLEMA N.° 7

Si dos regiones exagonales, una convexa y otra no convexa, se superponen, podemos deducir que:

I. Como máximo se determinan ocho regiones triangulares.
II. Como máximo se determinan nueve regiones convexas entre triangulares y cuadrangulares.
III. La región común puede ser no convexa.

A) VFV B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFV

Resolución



A: región exagonal no convexa

B: región exagonal convexa

I. **Falso**
En el gráfico podemos notar más de ocho regiones triangulares.

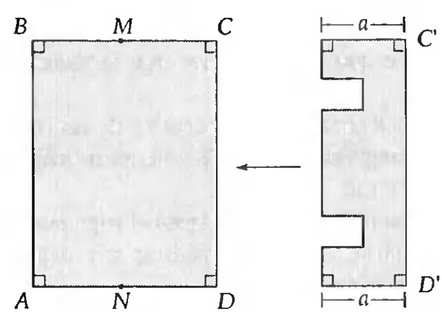
II. **Falso**
Se observan diez regiones convexas y todas son triangulares.

III. **Verdadero**
Del gráfico, $A \cap B$ es una región no convexa. Para otro tipo de superposición, la parte común puede ser convexa.

Clave E

PROBLEMA N.° 8

En el gráfico, $BM=MC=AN=a$ y $AB=C'D'$. Si la región no convexa se desplaza hacia la izquierda, podemos asumir que:

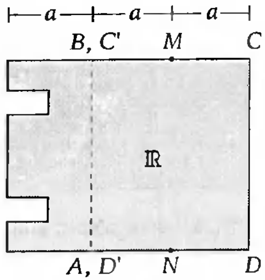


I. Cuando AB coincide con $\overline{C'D'}$, la región resultante es convexa.
II. Cuando MN coincide con $\overline{C'D'}$, la región común entre ellas es no convexa.
III. Cuando CD coincide con $\overline{C'D'}$, las dos regiones determinadas son no convexas.

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFF E) FFV

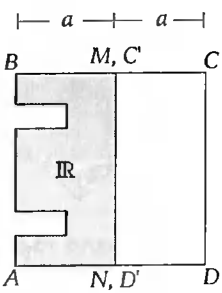
Resolución

I. Falso



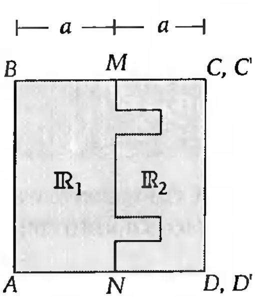
Cuando $\overline{AB}$ coincide con $\overline{C'D'}$, la región resultante no es convexa.

II. Verdadero



Cuando $\overline{MN}$ coincide con $\overline{C'D'}$, la región común es no convexa.

III. Verdadero

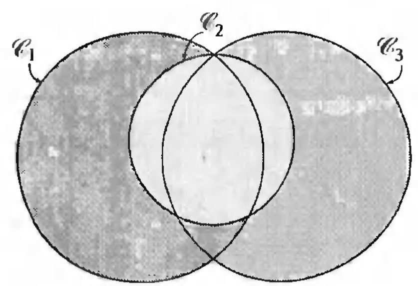


Cuando $\overline{CD}$ coincide con $\overline{C'D'}$, las regiones determinadas son no convexas.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

En el gráfico,
se muestran los círculos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, así

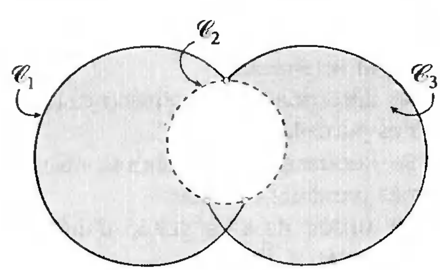


I. $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_2$ resulta una región no convexa.
II. $(\mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_1$ resulta una región convexa.
III. $(\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_1$ resulta una región no convexa.

A) FFV B) VVF C) VFV
D) FFF E) FVF

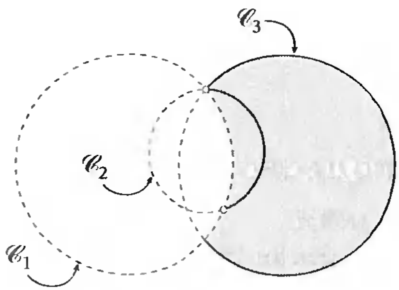
Resolución

I. Verdadero



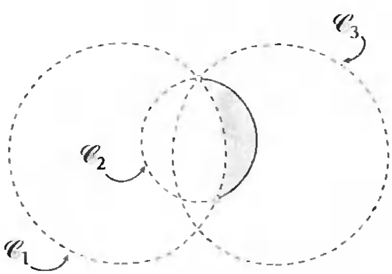
Del gráfico:
$(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_2$ es una región no convexa.

II. **Falso**



$(\mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_1$ es una región no convexa.

III. **Verdadero**



$(\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_1$ es una región no convexa.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

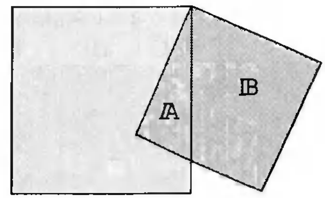
Si se tienen dos regiones cuadradas, ¿qué ocurre al intersecarse?

I. Se determina como mínimo cuatro regiones parciales convexas.
II. Se determina como máximo nueve regiones parciales convexas.
III. La unión de ellas puede determinar un conjunto convexo.

A) FVF B) FVV C) VVV
D) VFV E) FFV

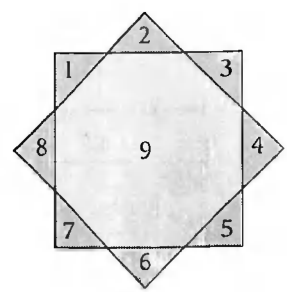
Resolución

I. **Falso**



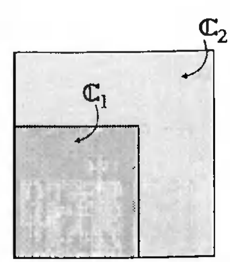
En el gráfico, las regiones cuadradas determinan dos regiones parciales convexas $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, y como mínimo es una.

II. **Verdadero**



La intersección de dos regiones cuadradas determina como máximo nueve regiones parciales convexas.

III. **Verdadero**



La unión de dos regiones cuadradas puede determinar un conjunto convexo.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si a un plano se le extrae un punto, el conjunto restante es convexo.

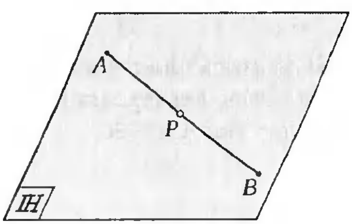
II. Si a una región triangular se le extraen dos bisectrices interiores, la región obtenida puede ser un conjunto convexo.

III. Todo ángulo es un conjunto convexo.

A) VVV B) FFV C) VFV
D) FFF E) FVV

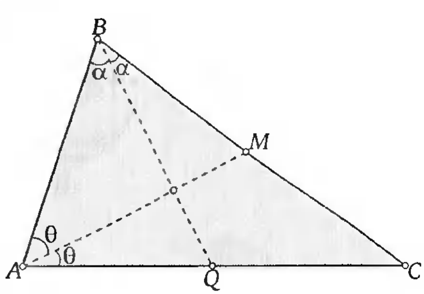
Resolución

I. Falso



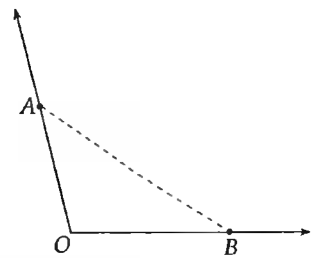
▰ $\mathbb{H}$: plano $\mathbb{H}$
P: punto P
▰ $\mathbb{H}-\{P\}$: no es un conjunto convexo.

II. Falso



$\blacktriangle ABC$: región triángular ABC.
$\overline{AM}$ y $\overline{BQ}$: bisectrices interiores.
$\blacktriangle ABC-\{\overline{AM}\cup\overline{BQ}\}$ es un conjunto no convexo.

III. Falso



$\measuredangle AOB$: ángulo AOB
El $\measuredangle AOB$ no es un conjunto convexo.

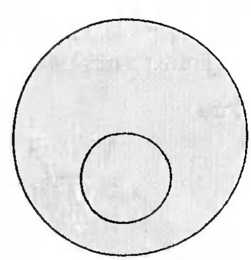
Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si se trazan dos rectas secantes a una región cuadrangular convexa, las regiones parciales determinadas por dichas rectas son convexas.

II. Al trazar dos tangentes a la circunferencia menor, estas rectas y la circunferencia menor determinan siempre dos conjuntos no convexos y un máximo de cuatro conjuntos convexos en el círculo del gráfico.



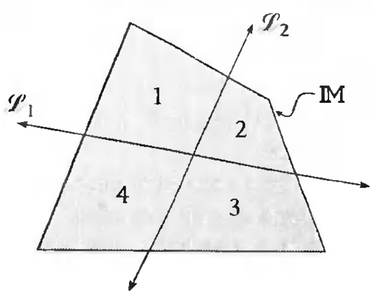
III. La circunferencia inscrita en una región triangular determina tres regiones no convexas.

A) VVF B) FFV C) VVV
D) FFF E) VFF

Resolución

I. Verdadero

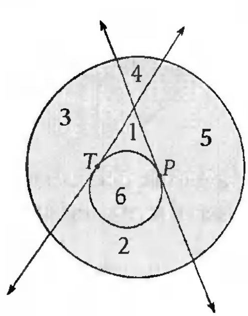
- Dos rectas secantes determinan, en el plano que las contiene, cuatro regiones convexas.
- Dos rectas paralelas determinan, en el plano que las contiene, tres regiones convexas.
- Del teorema de conjuntos, sabemos que la intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.
- Dos rectas secantes a una región cuadrangular convexa determinan siempre regiones convexas en el plano que las contiene.



- Luego, la intersección de cualquiera de estas regiones convexas con la región convexa cuadrangular determinará regiones parciales convexas.

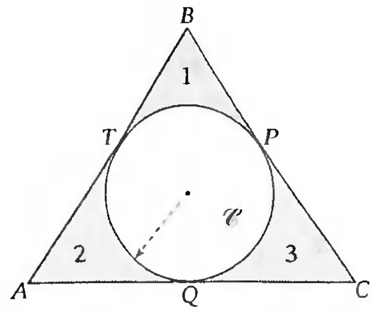
$\mathbb{M}$: región cuadrangular convexa
Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, secantes en $\mathbb{M}$, determinan regiones parciales convexas.

II. Verdadero



T y P: puntos de tangencia
Las regiones 1 y 2 son conjuntos no convexos.
Las regiones 3, 4, 5 y 6 son conjuntos convexos.

III. Verdadero

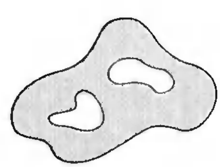


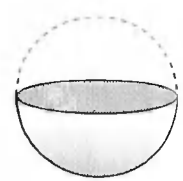
$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el triángulo ABC
$\mathscr{C}$ determina tres regiones no convexas en la región triangular ABC.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

En los siguientes gráficos, seleccione cuáles son conjuntos conexos.


(I)

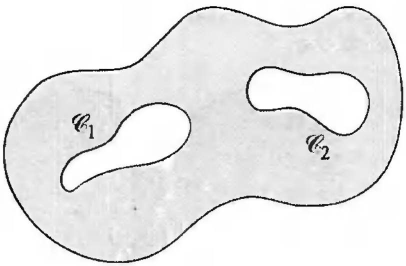

(II)


(III)

A) solo I B) I y III C) solo II
D) solo III E) todos

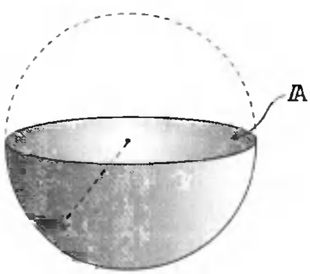
Resolución

I.



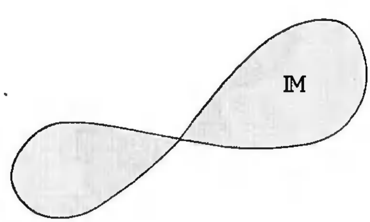
En el gráfico, la región mostrada presenta dos curvas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ no contráctiles.
Por lo tanto, será un conjunto doblemente conexo.

II.



$\mathbb{A}$ es una semiesfera, y podemos notar que es un conjunto simplemente conexo.

III.



$\mathbb{M}$ es una región conformada por una sola pieza. Por lo tanto, $\mathbb{M}$ será un conjunto simplemente conexo.

Las figuras mostradas en (I), (II) y (III) serán conjuntos conexos.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 14

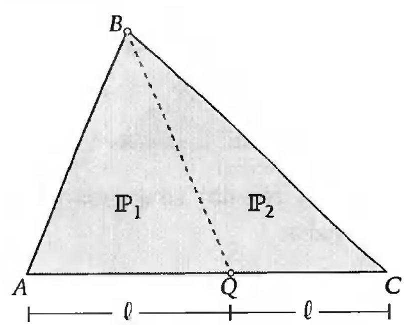
Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si a una región triangular se le omite una mediana, se determina un conjunto inconexo.
II. Si a un círculo se le extrae la circunferencia que lo limita, se determina un conjunto inconexo.
III. Si el conjunto A es la unión de dos conjuntos no vacíos y separados, significa que es conexo.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFF E) FVV

Resolución

I. Verdadero



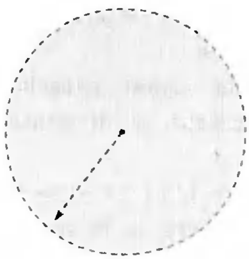
$\triangle ABC$: región triangular ABC

$\overline{BQ}$: mediana

Al omitir $\overline{BQ}$ en la región se determina un conjunto de dos piezas $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$.

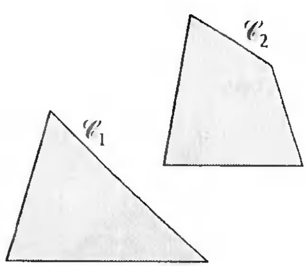
Por lo tanto, $\triangle ABC-\overline{BQ}$ será un conjunto inconexo.

II. Falso



Al omitir la circunferencia que limita un círculo se obtiene un conjunto de una sola pieza, siendo así un conjunto conexo.

III. Falso



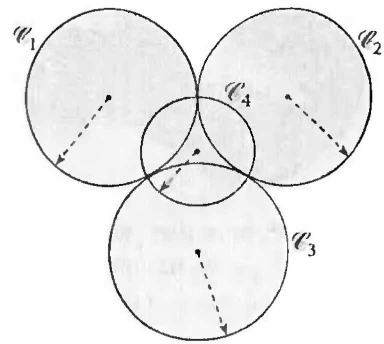
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son dos conjuntos no vacíos y separados.

Si $\mathscr{C}_3=\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$, entonces $\mathscr{C}_3$ no será un conjunto conexo, porque está conformado por dos piezas separadas.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 15

En el gráfico se muestran cuatro círculos. Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

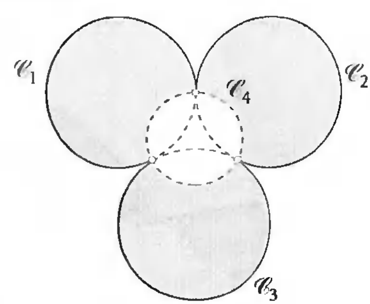


I. El conjunto $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \mathscr{C}_4)-\mathscr{C}_4$ no es simplemente conexo.
II. El conjunto $\mathscr{C}_3-\mathscr{C}_4$ es conexo.
III. El conjunto $\mathscr{C}_4-(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3)$ es un conjunto no simplemente conexo.

A) FFV B) VVF C) FFF
D) VFF E) VFV

Resolución

I. Verdadero

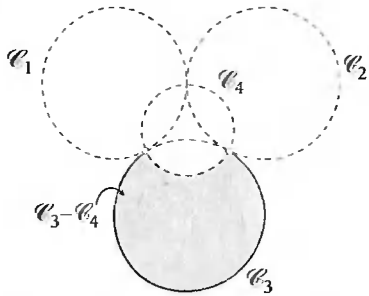


Del gráfico, podemos notar que

$$\{\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \mathscr{C}_4\}-\mathscr{C}_4$$

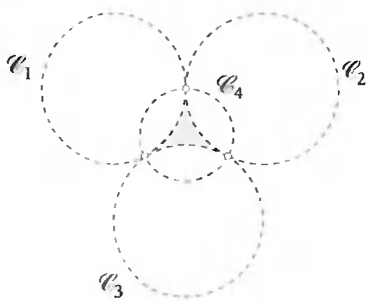
no es un conjunto simplemente conexo.

II. Verdadero



A partir del gráfico, podemos afirmar que $\mathscr{C}_3-\mathscr{C}_4$ es un conjunto conexo simple.

III. Falso



Según el gráfico,

$$\mathscr{C}_4-\{\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\mathscr{C}_3\}$$

es un conjunto simplemente conexo.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Si la reunión de una región no convexa con una región convexa, de tal forma que no se intersecan, resulta una región convexa; entonces dichas regiones no podrán ser:

A) una región cuadrangular y un círculo.
B) una región cuadrangular y una región triangular.
C) una región pentagonal y una región triangular.
D) A y B.
E) B y C.

Resolución

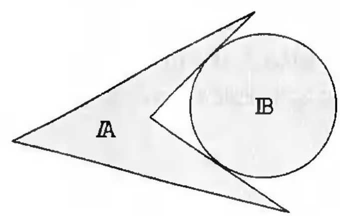
Sea

$\mathbb{A}$: región no convexa
$\mathbb{B}$: región convexa

Por condición, $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ debe ser una región convexa.

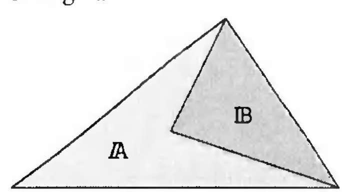
Analizemos las tres primeras alternativas:

A) Una región cuadrangular y un círculo.



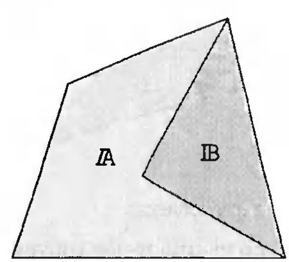
$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$: región no convexa

B) Una región cuadrangular y una región triangular.



$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$: región convexa

C) Una región pentagonal y una región triangular.



$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$: región convexa

Luego de A), B) y C) podemos afirmar que dichas regiones no podrán ser una región cuadrangular y un círculo.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

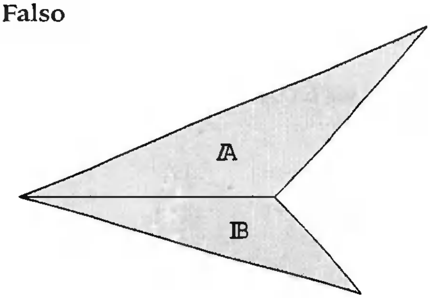
Dadas las siguientes proposiciones, dé el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. La unión de dos regiones convexas resulta una región convexa.
II. Una recta secante a una región convexa determina en ella dos regiones convexas.
III. La intersección de dos regiones no convexas puede ser una región convexa.

A) VFF
B) FVV
C) VVF
D) FFV
E) FVF

Resolución

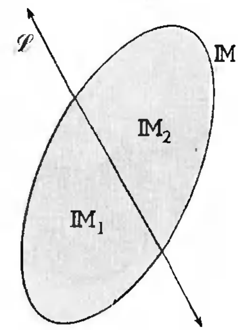
I. Falso



$\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$: regiones convexas

Pero $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ no es una región convexa.

II. Verdadero

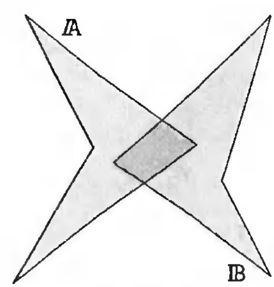


$\mathbb{M}$: región convexa

$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$: recta secante de $\mathbb{M}$

Notamos que las regiones $\mathbb{M}_1$ y $\mathbb{M}_2$, determinadas por $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$, son regiones convexas.

III. Verdadero



$\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son regiones no convexas.

Pero $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ es una región convexa.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

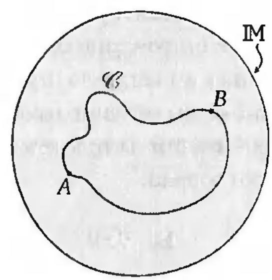
I. El círculo es un conjunto conexo.
II. En un triángulo ABC se traza la mediana AM; si R es la región triangular ABC, entonces $R - \overline{AM}$ no es un conjunto conexo.

III. La intersección de dos conjuntos conexos siempre es un conjunto conexo.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) VVF

Resolución

I. Verdadero



$\mathbb{M}$: círculo

Del gráfico $\forall\ A, B \in \mathbb{M}$, existe al menos una línea curva cerrada $\mathscr{C}$, tal que

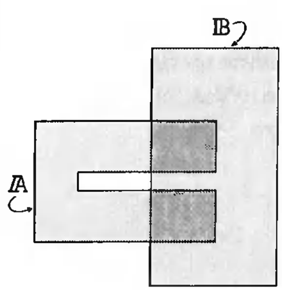
$A, B \in \mathscr{C} \wedge \mathscr{C} \subset \mathbb{M}$

Por lo tanto, $\mathbb{M}$ será un conjunto conexo.

II. Verdadero

Esta proposición ya se analizó en la proposición I del problema N.° 14.

III. Falso



$\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$: conjuntos conexos

Notamos del gráfico que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ nos da un conjunto de dos piezas. Por lo tanto, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ será un conjunto no conexo.

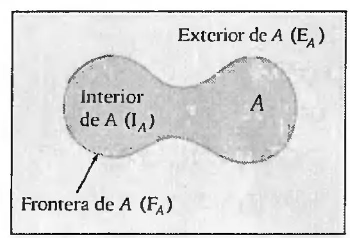
Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Determine si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

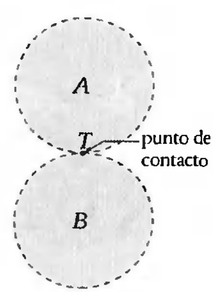
I. Un subconjunto de la recta euclidiana es conexo si y solo si es un segmento de ella.

II.



$F_A = C(I_A \cup E_A)$; C: complemento

III.



Siendo A conjunto A, y B conjunto B.

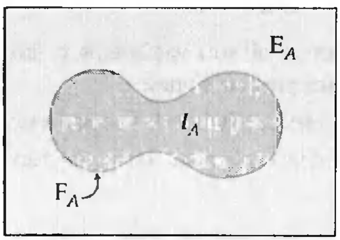
Si $A \cup T \cup B = E$, E es un conjunto conexo.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVV E) FVF

Resolución

I. **Falso**
Un subconjunto conexo de una recta no solo podría ser un segmento, sino también un punto, un rayo o una semirrecta.

II. **Verdadero**



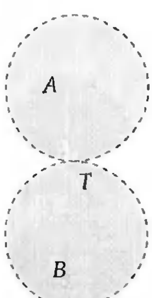
Del gráfico:

$C(F_A)=I_A \cup E_A$

$C(C(F_A))=C(I_A \cup E_A)$

$\therefore \quad F_A=C(I_A \cup E_A)$

III. **Verdadero**



T es punto de contacto entre los bordes de A y B.
$E=A \cup T \cup B$

Entonces, E será un conjunto de una sola pieza.
Por lo tanto, E será un conjunto conexo.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

De las siguientes proposiciones, señale su condición verdadera o falsa:

I. El vacío es un conjunto convexo.
II. El punto es un conjunto convexo.
III. El punto es un conjunto inconexo.
IV. Infinitos puntos consecutivos forman un conjunto conexo.

A) VVFF B) VFVF C) FVFV
D) FFVV E) FVVF

Resolución

I. **Verdadero**
El conjunto vacío, a pesar de no tener elementos, es un conjunto convexo.

II. **Verdadero**
El punto es un conjunto unitario y es considerado un conjunto convexo.

III. **Falso**
El punto es un conjunto simplemente conexo.

IV. **Falso**
Si en una recta se omite uno de sus puntos, se obtiene un conjunto de infinitos puntos consecutivos, el cual no será un conjunto conexo.

Clave **A**

Capítulo

3

Línea recta, segmento y ángulo

Cuando observemos el paso de un cometa o el de los aviones que superan la velocidad del sonido, cualquiera de ellos dejan atrás una estela, que nos da la idea de recta.

A su vez, los ingenieros y arquitectos utilizan segmentos para poder diseñar los planos y el trazado de los terrenos, y en el medio en el que nos encontramos los podemos ver a cada momento; por ejemplo, en el piso o las paredes de una vivienda encontramos segmentos y ángulos.

En este capítulo presentamos problemas de suma, resta y producto de las longitudes de los segmentos de línea recta, suma y resta de las medidas de ángulos, así como de suplemento y complemento de ángulos. También abordaremos las propiedades de ángulos entre rectas paralelas y una transversal.

Capítulo 3

Línea recta, segmento y ángulo

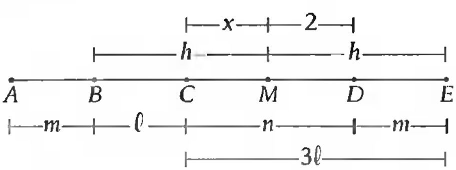
PROBLEMA N.° 1

Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E, tal que $AB+CD=3(BC)$ y $DE=AB$. Si luego se ubica el punto medio de $\overline{BE}$, M, donde $MD=2$ y $AE=16$, calcule MC.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Piden x.



Del dato, M es punto medio de $\overline{BE}$

$\rightarrow$ $BM=ME=h$

$x=BM-BC$

$\rightarrow$ $x=h-\ell$ (I)

Por dato

$AB+CD=3(BC)$

$m+n=3\ell$

$CE=m+n=3\ell$

$BE=4\ell$

$2h=4\ell$

$\rightarrow$ $h=2\ell$ (II)

De (II) en (I)

$x=\ell$

Por dato:

$AE=16 \rightarrow m+4\ell=16$ (III)

$MD=2$; $ME-ED=2$

$\rightarrow$ $h-m=2$

Pero

$h=2\ell \rightarrow 2\ell-m=2$ (IV)

De (III)+(IV)

$(m+4\ell)+(2\ell-m)=16+2$

$6\ell=18$

$\rightarrow$ $6x=18$

$\therefore$ $x=3$

Clave **B**

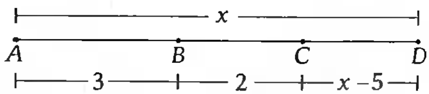
PROBLEMA N.° 2

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D. Si se cumple que la relación $4(AB)-BD-2(CD)=4$, $AB=3$ y $AC=5$, calcule AD.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución

Piden x.



Datos:

$AB=3$ y $AC=5$

Además

$4(AB)-BD-2(CD)=4$

Reemplazando las longitudes de acuerdo al gráfico:

$4(3)-(x-3)-2(x-5)=4$

$25-3x=4 \rightarrow 21=3x$

$\therefore \; x=7$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que

$(AB)(CD)=(AD)(BC)$

$(BC)(CD)=28$ y

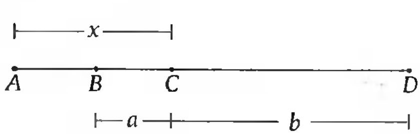
$CD-BC=7$

Calcule AC

A) 2 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución

Piden x.



De los datos:

$(x-a)b=(x+b)a$ (I)

$ab=28$

$b-a=7$

De (I)

$xb-ab=xa+ab$

$x(b-a)=2ab$

$\rightarrow \; x(7)=2(28)$

$\therefore \; x=8$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

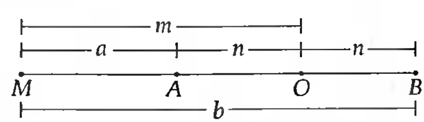
Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos M, A y B, siendo O el punto medio de $\overline{AB}$. Calcule K para que se cumpla la siguiente igualdad:

$(MA)^2+(MB)^2=K[(MO)^2+(AO)^2]$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Piden K.



A partir del dato:

$a^2+b^2=K(m^2+n^2)$

Del gráfico:

$a=m-n$ (I)

$b=m+n$ (II)

De (I)

$$a^2=m^2-2mn+n^2$$

De (II)

$$b^2=m^2+2mn+n^2$$

$$\rightarrow\ a^2+b^2=2(m^2+n^2)$$

Pero

$$a^2+b^2=K(m^2+n^2)$$

$\therefore\ K=2$

Clave **B**

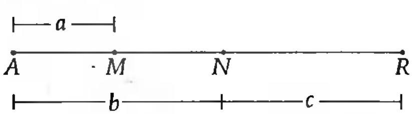
PROBLEMA N.° 5

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, M, N, R. Si $(AM)(AR)=3(MN)(NR)$ y $\dfrac{m}{NR}=\dfrac{n}{AM}-\dfrac{\ell}{AN}$, calcule $m+n+\ell$.

A) 16 B) 8 C) 12
D) 14 E) 18

Resolución

Piden $m+n+\ell$.



Dato:

$$\frac{m}{NR}=\frac{n}{AM}-\frac{\ell}{AN} \qquad \text{(I)}$$

Además

$$(AM)(AR)=3(MN)(NR)$$

$$\rightarrow\ a(b+c)=3(b-a)c \qquad \text{(II)}$$

$$ab+ac=3bc-3ac$$

$$ab=3bc-4ac$$

$$\frac{1}{c}=\frac{3b-4a}{ab}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{3}{a}-\frac{4}{b}$$

$$\rightarrow\ \frac{m}{NR}=\frac{n}{AM}-\frac{\ell}{AN}$$

Luego

$$m=1;\ n=3\ \text{ y }\ \ell=4$$

$\therefore\ m+n+\ell=8$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que

$$\frac{a}{AC}+\frac{b}{CD}=\frac{e}{AB}+\frac{d}{BD}\ \text{ y}$$

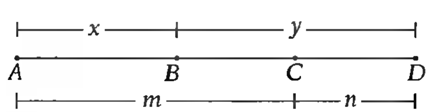
$(BD)(CD)=(AC-BD)(AD)$.

Calcule e.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 1,5 E) 2,5

Resolución

Piden e.



Dato:

$$\frac{a}{AC}+\frac{b}{CD}=\frac{e}{AB}+\frac{d}{BD}$$

$$\rightarrow \quad \frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{e}{x}+\frac{d}{y} \qquad \text{(I)}$$

Por dato:

$$(BD)(CD)=(AC-BD)(AD)$$

$$yn=(m-y)(m+n)$$

$$2yn=m(m+n-y)$$

Pero

$$m+n-y=x$$

$$\rightarrow \quad 2yn=mx$$

Del gráfico:

$$m-x=y-n$$

$$\frac{m-x}{2yn}=\frac{y-n}{2yn}$$

$$\rightarrow \quad \frac{m-x}{mx}=\frac{y-n}{2yn}$$

$$\frac{2m-2x}{mx}=\frac{y-n}{yn}$$

$$\frac{2}{x}-\frac{2}{m}=\frac{1}{n}-\frac{1}{y}$$

$$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{e}{x}=\frac{2}{x}$$

$\therefore \; e=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

La suma de las medidas de dos ángulos es 80° y el complemento del primero es el doble del segundo. Calcule la diferencia de las medidas de dichos ángulos.

A) 70° B) 10° C) 60°
D) 50° E) 40°

Resolución

Sean α y β las medidas de los ángulos.

Piden $\alpha-\beta$.

Por datos:

$$\alpha+\beta=80° \qquad \text{(I)}$$

$$C(\alpha)=2\beta \qquad \text{(II)}$$

$C(\alpha)$: complemento de α

$$C(\alpha)=90°-\alpha \qquad \text{(III)}$$

De (III) en (II)

$$90°-\alpha=2\beta$$

$$\rightarrow \quad \alpha+2\beta=90° \qquad \text{(IV)}$$

De (IV) – (I)

$$\beta=10°$$

$$\rightarrow \quad \alpha=70°$$

$\therefore \; \alpha-\beta=60°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

¿Cuánto le falta al complemento de un ángulo para que sea el suplemento del mismo ángulo?

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 80°

Resolución

Piden x.

Sea θ la medida del ángulo.

Por dato:

$$C(\theta)+x=S(\theta)$$

$C(\theta)$: complemento de θ

$S(\theta)$: suplemento de θ

$\rightarrow\ C(\theta)=90°-\theta$ y

$S(\theta)=180°-\theta$

Luego

$$(90°-\theta)+x=180°-\theta$$

$\therefore\ x=90°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

Se tienen los ángulos adyacentes AOB y BOC, tal que

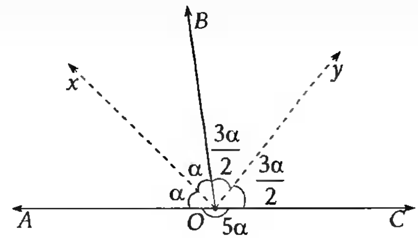
$$\frac{m\sphericalangle AOB}{2}=\frac{m\sphericalangle BOC}{3}=\frac{m\sphericalangle COA}{5}$$

Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y BOC.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 120°

Resolución

Piden $m\sphericalangle XOY=\dfrac{5\alpha}{2}$.



Por dato:

$$\frac{m\sphericalangle AOB}{2}=\frac{m\sphericalangle BOC}{3}=\frac{m\sphericalangle COA}{5}$$

$\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$: bisectrices de los ángulos AOB y BOC.

Alrededor de O, notamos:

$$2\alpha+3\alpha+5\alpha=360°$$

$$10\alpha=360°$$

$$\alpha=36°$$

$$\rightarrow\ m\sphericalangle XOY=\frac{5(36°)}{2}$$

$\therefore\ m\sphericalangle XOY=90°$

Clave **D**

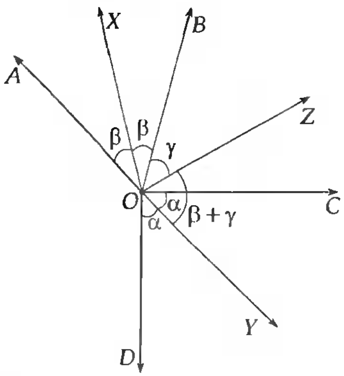
PROBLEMA N.° 10

Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. Si luego se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$ de los ángulos AOB, COD y XOY, respectivamente, además $m\sphericalangle XOC+m\sphericalangle XOD-4(m\sphericalangle BOZ)=80°$ y $m\sphericalangle BOZ=50°$, calcule $m\sphericalangle COD$.

A) 10° B) 20°
C) 40°
D) 60° E) 80°

Resolución

Piden $m\measuredangle COD=2\alpha$.



Por dato:

$\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$

son bisectrices de los ángulos

AOB, *COD* y *XOY*

Además

$m\measuredangle XOC+m\measuredangle XOD-4(m\measuredangle BOZ)=80°$ (I)

$m\measuredangle XOC=m\measuredangle XOY-m\measuredangle COY$

$\rightarrow\ m\measuredangle XOC=2\beta+2\gamma-\alpha$ (II)

$m\measuredangle XOD=360°-(m\measuredangle XOY+m\measuredangle YOD)$

$\rightarrow\ m\measuredangle XOD=360°-2\beta-2\gamma-\alpha$ (III)

Dato:

$m\measuredangle BOZ=50°$ (IV)

De (II), (III) y (IV) en (I)

$(2\beta+2\gamma-\alpha)+(360°-2\beta-2\gamma-\alpha)-4(50°)=80°$

$\rightarrow\ 360°-2\alpha-200°=80°$

$2\alpha=80°$

$\therefore\ m\measuredangle COD=80°$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

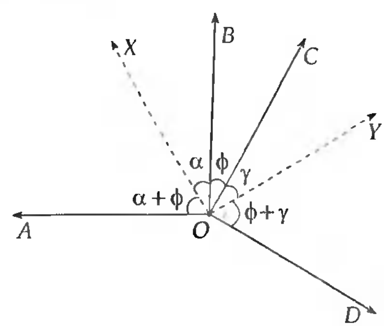
Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que $m\measuredangle AOB+m\measuredangle COD=\beta$.
Calcule la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos *BOD* y *AOC*.

A) $\frac{\beta}{2}$ B) $\frac{\beta}{3}$ C) $\frac{\beta}{4}$

D) $\frac{\beta}{6}$ E) $\frac{\beta}{8}$

Resolución

Piden $m\measuredangle XOY$.



Del gráfico: $m\measuredangle XOY=\alpha+\phi+\gamma$

$\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ son bisectrices de los ángulos *AOC* y *BOD*.

Por dato:

$m\measuredangle AOB+m\measuredangle COD=\beta$

$\rightarrow\ (2\alpha+\phi)+(\phi+2\gamma)=\beta$

$2(\alpha+\phi+\gamma)=\beta$

$2(m\measuredangle XOY)=\beta$

$\therefore\ m\measuredangle XOY=\frac{\beta}{2}$

Clave **A**

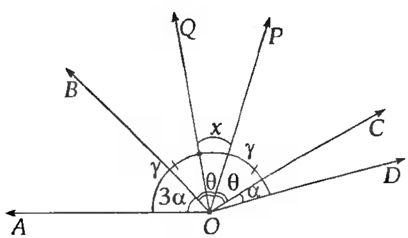
PROBLEMA N.° 12

Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. Si $m\sphericalangle AOB=3(m\sphericalangle COD)$, $m\sphericalangle AOC=120°$ y $m\sphericalangle BOD=100°$, calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BOC y AOD.

A) 6° B) 5° C) 8°
D) 10° E) 12°

Resolución

Piden $m\sphericalangle POQ=x$.



$\overrightarrow{OP}$: bisectriz del $\sphericalangle BOC$

$\overrightarrow{OQ}$: bisectriz del $\sphericalangle AOD$

Del gráfico:

$x=m\sphericalangle QOD-m\sphericalangle POD$

$x=\gamma-\theta-\alpha$ (I)

$m\sphericalangle AOD=2\gamma=4\alpha+2\theta$

$\rightarrow\ \gamma=2\alpha+\theta$ (II)

De (II) en (I)

$x=\alpha$

Por dato:

$m\sphericalangle AOC=120°$

$\rightarrow\ 3\alpha+2\theta=120°$ (III)

$m\sphericalangle BOD=100°$

$\rightarrow\ \alpha+2\theta=100°$ (IV)

De (III) – (IV)

$2\alpha=-20°$

$\alpha=10°$

$\therefore\ x=10°$

Clave **B**

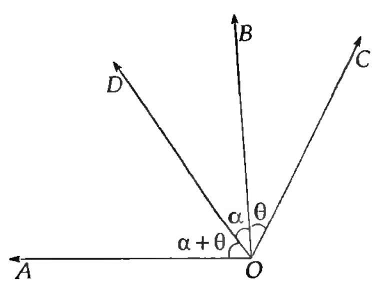
PROBLEMA N.° 13

La diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes AOB y BOC es 38°. Calcule la $m\sphericalangle BOD$, si $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOC$.

A) 36° B) 28° C) 42°
D) 38° E) 19°

Resolución

Piden $m\sphericalangle BOD=\alpha$.



$\overrightarrow{OD}$: bisectriz del ángulo AOC

Por dato:

$m\sphericalangle AOB-m\sphericalangle BOC=38°$

$\rightarrow\ (2\alpha+\theta)-\theta=38°$

$2\alpha=38°$

$\alpha=19°$

$\therefore\ m\sphericalangle BOD=19°$

Clave **E**

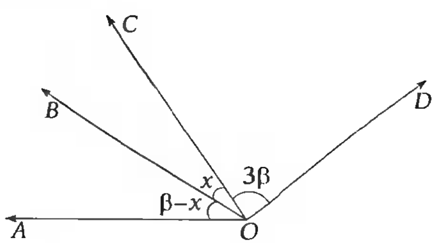
PROBLEMA N.° 14

Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que:
$m\measuredangle BOD-3(m\measuredangle AOB)=60°$ y
$m\measuredangle COD=3(m\measuredangle AOC)$.
Calcule $m\measuredangle BOC$.

A) 12°
B) 15°
C) 18°
D) 22°
E) 25°

Resolución

Piden $m\measuredangle BOC=x$.



Datos:

$m\measuredangle BOD-3(m\measuredangle AOB)=60°$ (I)

$m\measuredangle COD=3(m\measuredangle AOC)$

De (I)

$(x+3\beta)-3(\beta-x)=60°$

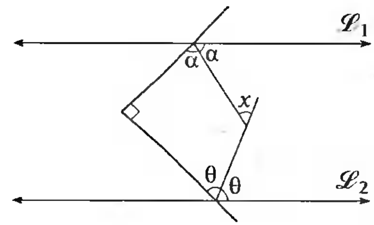
$4x=60°$

$\therefore\ x=15°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

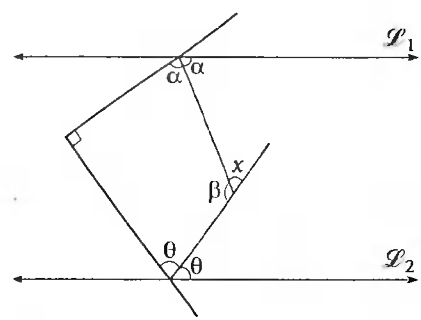
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.
Calcule x.



A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 90°
E) 70°

Resolución

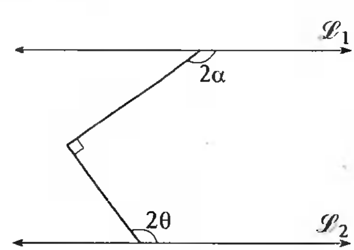
Piden x.



Dato: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

Del gráfico:

$x+\beta=180°$ (I)



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

$\rightarrow\ 2\alpha+90°+2\theta=360°$

$\alpha+\theta=135°$ (II)

Del gráfico:

$\beta=\alpha+\theta$ (III)

De (II) y (III)

$\beta=135°$

Reemplazamos en (I)

$x+135°=180°$

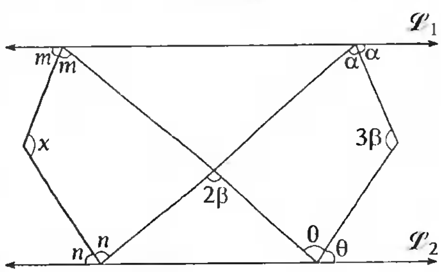
$\therefore\ x=45°$

Clave A

PROBLEMA N.° 16

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\,//\,\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

Calcule x.

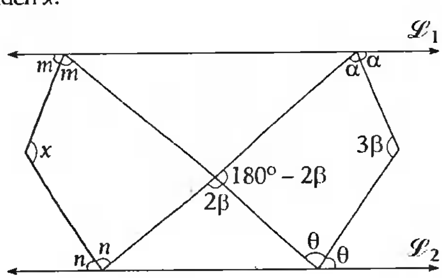


A) 135° B) 130° C) 145°

D) 152° E) 165°

Resolución

Piden x.



Por dato: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\,//\,\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

Por el teorema de ángulos alternos internos:

$2m=2\theta$

$\rightarrow\ m=\theta$

$2n=2\alpha$

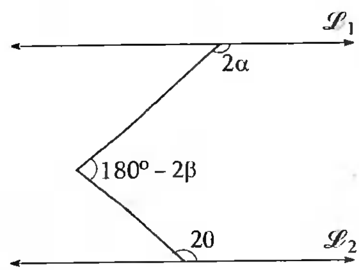
$\rightarrow\ n=\alpha$

Del gráfico:

$x=m+n$ y

$3\beta=\alpha+\theta$

$\rightarrow\ x=3\beta$ (I)



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\,//\,\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

$\rightarrow\ (180°-2\beta)+2\alpha+2\theta=360°$

$2(\alpha+\theta-\beta)=180°$

$\alpha+\theta-\beta=90°$

Pero

$\alpha+\theta=3\beta$

$\rightarrow\ 3\beta-\beta=90°$

$2\beta=90°$

$\beta=45°$ (II)

De (II) en (I)

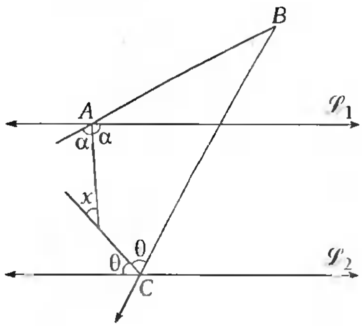
$x=3(45°)$

$\therefore\ x=135°$

Clave A

PROBLEMA N.° 17

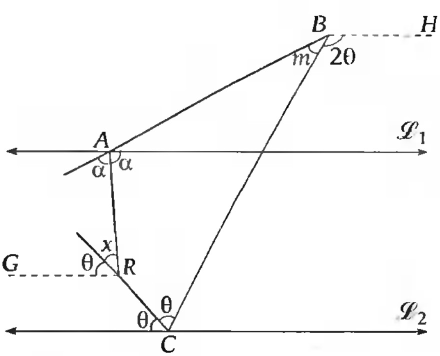
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $\measuredangle ABC$ es agudo, calcule el máximo valor entero de x.



A) 30°
B) 46°
C) 45°
D) 44°
E) 60°

Resolución

Piden el mayor valor entero de x.



Dato: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

$\measuredangle ABC$ es agudo

$\rightarrow \ m < 90°$ (I)

Se traza $\overline{RG} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

$\rightarrow \ x+\theta=\alpha$

$x=\alpha-\theta$ (II).

Se traza $\overline{BH} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$. Luego, por teorema de ángulos correspondientes:

$m+2\theta=2\alpha$

$m=2(\alpha-\theta)$ (III)

De (II) en (III)

$m=2x$ (IV)

De (IV) en (I)

$2x < 90°$

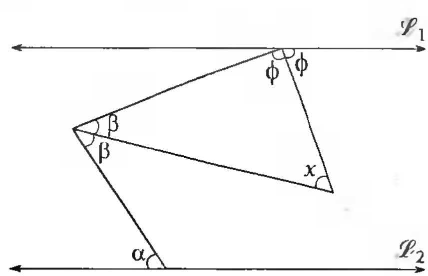
$x < 45°$

Por lo tanto, el mayor valor entero de x será 44°.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

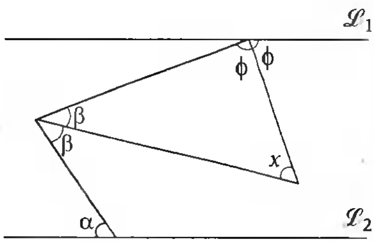
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $\alpha < 90°$, calcule el mínimo valor entero de x.



A) 44°
B) 45°
C) 89°
D) 91°
E) 46°

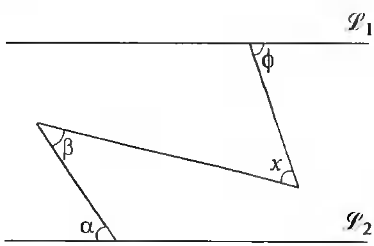
Resolución

Piden el menor valor entero de x.



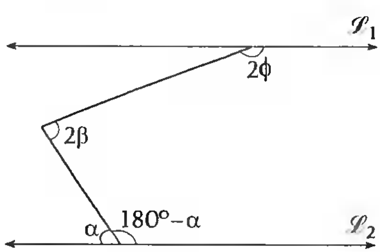
Dato:

$\alpha < 90°$ (I)



En el gráfico: $x+\alpha=\beta+\phi$

$\rightarrow$ $x=\beta+\phi-\alpha$ (II)



Del gráfico:

$$2\phi+2\beta+(180°-\alpha)=360°$$

$\rightarrow$ $\beta+\phi=90°+\dfrac{\alpha}{2}$ (III)

De (II)+(III)

$$x=90°-\frac{\alpha}{2}$$

$\alpha=180°-2x$ (IV)

De (IV) en (I)

$180°-2x < 90°$

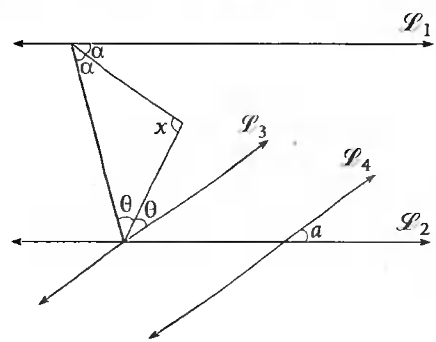
$45° < x$

Por lo tanto, el menor valor entero de x será 46°.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$. Si $a < 60°$, calcule el mayor valor entero de x.

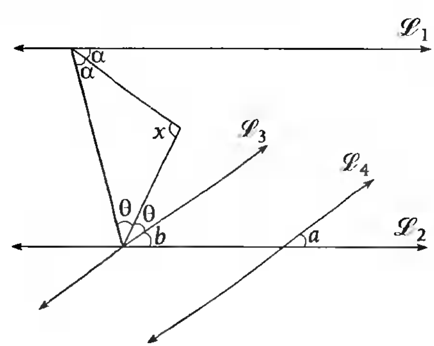


A) 119° B) 120° C) 115°

D) 121° E) 125°

Resolución

Piden el mayor valor entero de x.



Del dato:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{T}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{T}_2}$

  $\rightarrow\ x=\alpha+\theta+b$

- $\overleftrightarrow{\mathscr{T}_3}//\overleftrightarrow{\mathscr{T}_4}$

  $\rightarrow\ a=b$

Luego

$x=\alpha+\theta+a$ (I)

Por teorema de ángulos conjugados internos:

$2\alpha+2\theta+b=180°$

$a=b$

$\rightarrow\ 2\alpha+2\theta+a=180°$

$\alpha+\theta=90°-\dfrac{a}{2}$ (II)

De (I)+(II)

$x=90°+\dfrac{a}{2}$

$\rightarrow\ a=2x-180°$

Por dato:

$a<60°$

$\rightarrow\ 2x-180°<60°$

$x<120°$

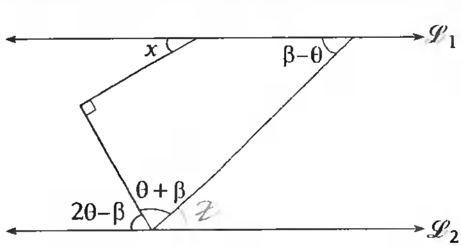
Por lo tanto, el mayor valor entero de x será 119°.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 20

Según el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{T}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{T}_2}$.

Si θ toma su mínimo valor entero, calcule x.

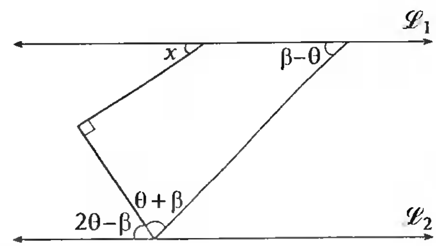


A) 45° B) 37° C) 74°

D) 86° D) 76°

Resolución

Piden x.



Dato:

$\overleftrightarrow{\mathscr{T}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{T}_2}$

$x+(2\theta-\beta)=90°$

$\rightarrow\ x=90°+\beta-2\theta$ (I)

Por teorema de ángulos conjugados internos:

$(\beta-\theta)+(3\theta)=180°$

$2\theta+\beta=180°$ (II)

De (I)+(II)

$x=270°-4\theta$ (III)

Del gráfico:

$2\theta-\beta>0;$

$2\theta>\beta$

$\rightarrow\ 4\theta>2\theta+\beta$

$4\theta>180°$

$\theta>45°$

Por dato, θ es entero y mínimo

$\rightarrow\ \theta=46°$ (IV)

De (IV) en (III)

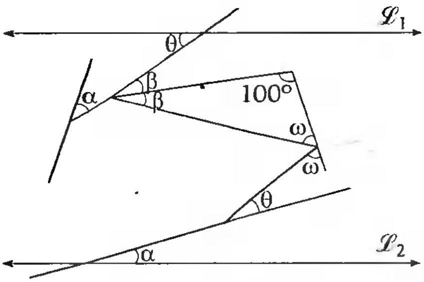
$x=270°-4(46°)$

$\therefore\ x=86°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

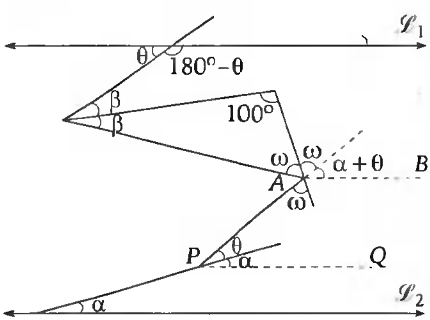
Según el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule α.



A) 10° B) 25° C) 20°
D) 16° E) 40°

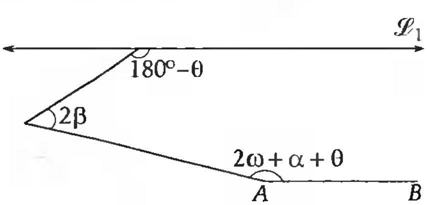
Resolución

Piden α.



Dato: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

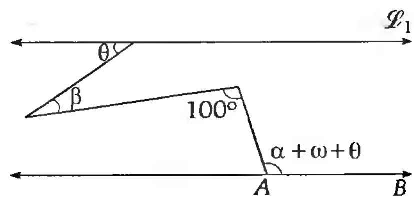
Se traza $\overline{PQ} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overline{AB} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$



Del gráfico:

$$(180^\circ-\theta)+2\beta+(2\omega+\alpha+\theta)=360^\circ$$

$$\rightarrow \quad \alpha+2\beta+2\omega=180^\circ \qquad \text{(I)}$$



En el gráfico:

$$\theta+100^\circ=\beta+(\alpha+\omega+\theta)$$

$$\rightarrow \quad \alpha=100^\circ-(\beta+\omega) \qquad \text{(II)}$$

De (I) – (II)

$$\beta+\omega=80^\circ$$

Reemplazamos en (II)

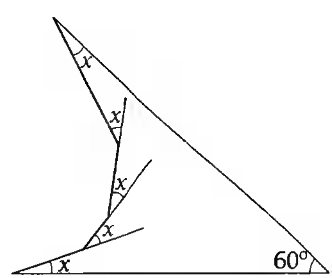
$$\alpha=100^\circ-80^\circ$$

$$\therefore \quad \alpha=20^\circ$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

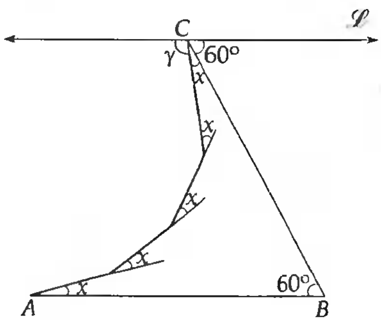
En el gráfico, calcule x.



A) 30° B) 24° C) 20°
D) 25° E) 22°

Resolución

Nos piden x.



Por C, se traza

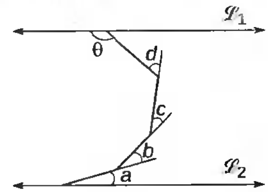
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AB}$

Entonces

$x+\gamma+60°=180°$

$x+\gamma=120°$ (I)

Nota



En el gráfico, si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

$\rightarrow$ $\theta=a+b+c+d$

En el problema:

$\gamma=x+x+x+x \rightarrow \gamma=4x$ (II)

De (II) en (I)

$5x=120°$

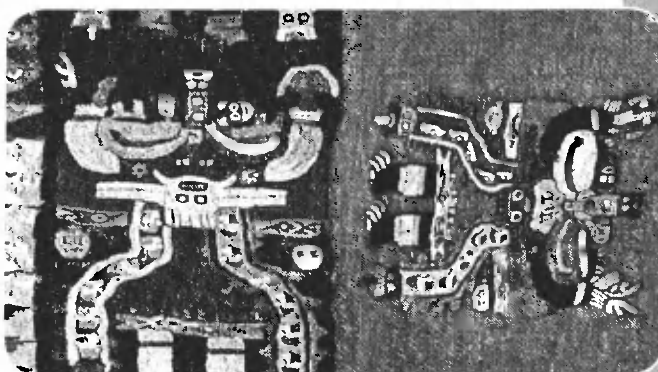
$\therefore$ $x=24°$

Clave **B**

Capítulo

4

Congruencia de figuras



Dos figuras serán iguales si comparten los mismos puntos, es decir, las figuras que se analizan resultan ser una sola, pero cuando existen dos figuras que no comparten todos sus puntos, estas pueden ser: diferentes, semejantes, equivalentes o congruentes.

Un concepto de congruencia se puede obtener al observar objetos de nuestro entorno que tengan la misma forma y tamaño, teniendo así similares características.

Asimismo, dos figuras son congruentes si al superponerse coinciden todos sus puntos, además los lados y ángulos que coinciden se llaman correspondientes; entonces dos figuras congruentes tienen la misma forma y tamaño.

En geometría, muchas veces se busca relacionar los elementos de una figura con otra, y una condición para ello es que las figuras sean congruentes. Por ello es importante reconocer cuándo dos figuras son congruentes.

En este capítulo planteamos problemas de congruencia de segmentos, par angular, ángulo, triángulo, polígonos y circunferencia.

Capítulo 4

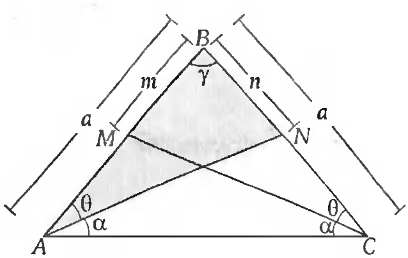
Congruencia de figuras

PROBLEMA N.° 1

En un triángulo ABC se ubican los puntos M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que $m\sphericalangle MCA=m\sphericalangle NAC$ y $AB=BC$. Indique qué se cumple.

A) $BM > BN$ B) $BM < BN$
C) $BM=BN$
D) $CM > AN$ E) $AN > CM$

Resolución



Datos:

$m\sphericalangle MCA=m\sphericalangle NAC$

$AB=BC$

$m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BCA=\alpha+\theta$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle NAB=m\sphericalangle MCB=\theta$

$\triangle ABN \cong \triangle CBM$(A. L. A.)

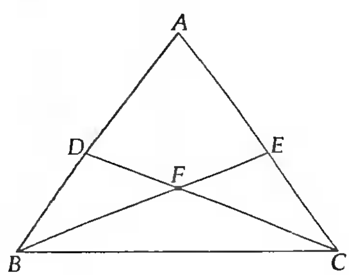
$\rightarrow$ $m=n$

$\therefore$ $BM=BN$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

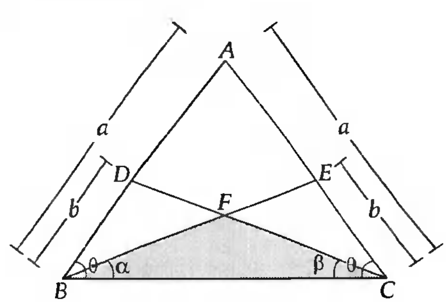
En el gráfico mostrado, $AB=AC$ y $BD=EC$. Señale lo que se cumple.



A) $AE=BD$ B) $AD=EC$
C) $BF=FE$
D) $BF=FC$ E) $BE=CD=BC$

Resolución

En el gráfico:



Datos:

$AB=AC$ y

$BD=EC$

$m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ACB=\theta$

$\triangle DBC\cong\triangle ECB$(L. A. L.)

$BD=EC$

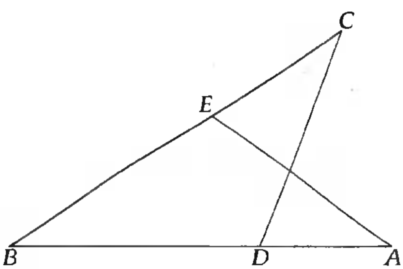
$\rightarrow\ \alpha=\beta$

$\therefore\ BF=FC$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

En las siguientes proposiciones, dé el valor de verdad cuando $DB=BE$ y $m\sphericalangle BCD=m\sphericalangle BAE$.



I. $\triangle BEA\cong\triangle BDC$

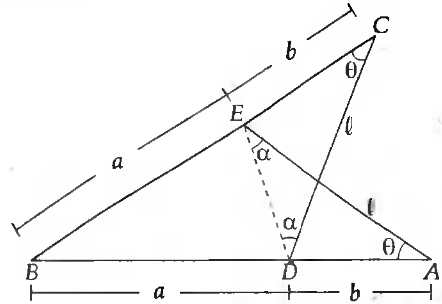
II. $\sphericalangle EAD\cong\sphericalangle ECD$

III. $\sphericalangle BDC\cong\sphericalangle BEA$

IV. $m\sphericalangle DEA=m\sphericalangle CDE$

A) VVVV
B) VFVV
C) VFVF
D) VFFV
E) FVVF

Resolución



Datos:

$m\sphericalangle BCD=m\sphericalangle BAE$ y

$BD=BE$

$\triangle BEA\cong\triangle BDC$(A. L. A.)

$\rightarrow$ $BC=BA=a+b$
$CD=AE=\ell$

$\triangle ECD\cong\triangle DAE$(L. A. L.)

$\rightarrow\ m\sphericalangle DEA=m\sphericalangle EDC=\phi$

Analizando las proposiciones, tendremos:

I. **Verdadero**

II. **Falso**

$\sphericalangle EAD\cong\sphericalangle DCE$

$\rightarrow\ \sphericalangle EAD\not\cong\sphericalangle ECD$

III. **Verdadero**

Del gráfico:

$\sphericalangle BDC\cong\sphericalangle BEA$

IV. **Verdadero**

Clave **B**

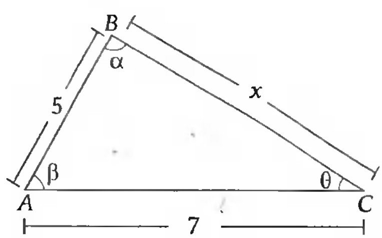
PROBLEMA N.° 4

Si en un triángulo ABC, $AB=5$; $AC=7$ y $m\sphericalangle ABC > m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$. Calcule BC, sabiendo que es un número entero.

A) 3
B) 4
C) 6
D) 8
E) 11

Resolución

Piden el valor entero de BC.



Dato:

$m\sphericalangle ABC > m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$

$AB=5$ y $AC=7$

Por dato: $\alpha > \beta > \theta$

Por el teorema de correspondencia en el $\triangle ABC$:

$\alpha > \beta$

$\rightarrow\ 7 > x$ (I)

$\beta > \theta$

$\rightarrow\ x > 5$ (II)

De (I) y (II)

$5 < x < 7;\ x=BC$

Por lo tanto, el valor entero de BC será 6.

Clave **C**

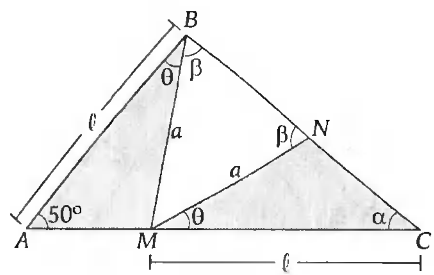
PROBLEMA N.° 5

Dado un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $AB=MC$; $m\sphericalangle ABM=m\sphericalangle CMN$; $m\sphericalangle MBN=m\sphericalangle MNB$ y $m\sphericalangle BAC=50°$. Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 50°
B) 40°
C) 60°
D) 25°
E) 75°

Resolución

Piden $m\sphericalangle ACB=\alpha$



Datos:

$AB=MC$

$m\sphericalangle ABM=m\sphericalangle CMN$

$m\sphericalangle MBN=m\sphericalangle MNB$

$m\sphericalangle BAC=50°$

Del gráfico:

$\triangle ABM \cong \triangle CMN$ (L. A. L.)

$\rightarrow\ m\sphericalangle MCN=m\sphericalangle BAM$

$\therefore\ \alpha=50°$

Clave **A**

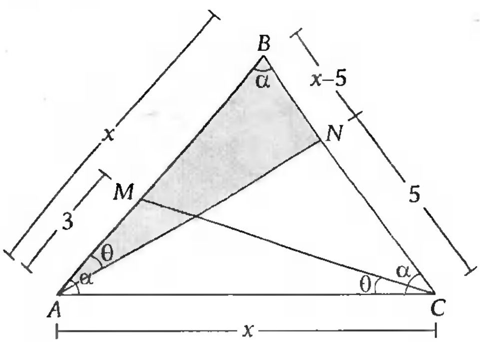
PROBLEMA N.° 6

En un triángulo ABC, m$\sphericalangle ABC$=m$\sphericalangle BAC$ y $AB=AC$. Se ubican los puntos N y M en $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tal que m$\sphericalangle NAB$=m$\sphericalangle MCA$. Si $AM=3$ y $CN=5$, calcule AC.

A) 6 B) 5
C) 7
D) 8 E) 10

Resolución

Piden $AC=x$.



Datos:

$AB=AC$

m$\sphericalangle ABC$=m$\sphericalangle BAC$

m$\sphericalangle NAB$=m$\sphericalangle MCA$, $AM=3$ y $CN=5$

m$\sphericalangle ACB$=m$\sphericalangle ABC=\alpha$

Del gráfico:

m$\sphericalangle BAC$=m$\sphericalangle BCA$=m$\sphericalangle ABC=\alpha$

$BC=AB=AC=x$

$\rightarrow BN=x-5$

$\triangle BAN \cong \triangle ACM$ (A. L. A.)

$\rightarrow BN=AM$

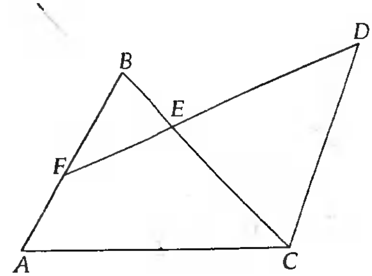
$x-5=3$

$\therefore x=8$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 7

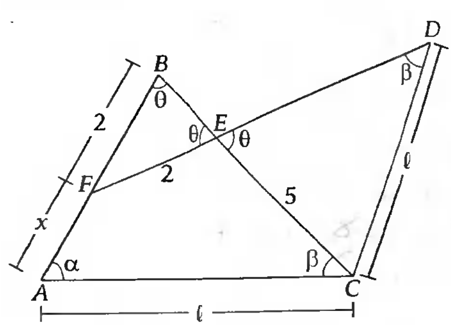
En el gráfico mostrado, los triángulos ABC y CED son congruentes, donde $AC=CD$. Si $EC=5$ y $EF=2$, calcule AF.



A) 2 B) 5
C) 4
D) 7 E) 3

Resolución

Piden $AF=x$.



Datos:

$AC=CD$, $EC=5$ y $EF=2$

Además, los triángulos ABC y CED son congruentes.

$AC=CD$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle CED=\theta$

$\triangle FBE$: $FB=FE=2$

Sea $m\sphericalangle EDC=\beta$

Del gráfico:

$BC > EC \rightarrow \alpha > \beta$

Luego

$m\sphericalangle BCA=m\sphericalangle EDC=\beta$

$\rightarrow$ $x+2=5$

$\therefore$ $x=3$

Clave **E**

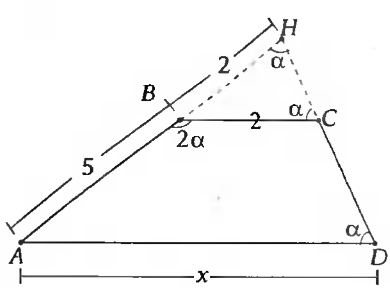
PROBLEMA N.° 8

En un cuadrilátero $ABCD$, $AB=5$; $\overline{BC}//\overline{AD}$; $BC=2$ y $m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle ADC)$. Calcule AD.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 10 E) 12

Resolución

Piden $AD=x$.



Datos:

$AB=5$, $BC=2$, $\overline{BC}//\overline{AD}$ y

$m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle ADC)$

Sea H la intersección de las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.

$m\sphericalangle HCB=m\sphericalangle HDA=\alpha$

$\triangle BHC$: isósceles

$\rightarrow$ $BH=BC=2$

$m\sphericalangle AHD=m\sphericalangle ADH=\alpha$

$\rightarrow$ $AH=AD$

$\therefore$ $x=7$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

En un triángulo ABC, si

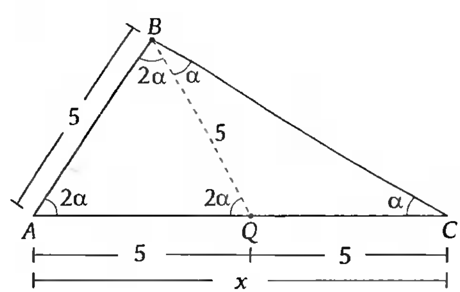
$$\frac{m\sphericalangle ABC}{3}=\frac{m\sphericalangle BAC}{2}=m\sphericalangle ACB$$

y $AB=5$, calcule AC.

A) 5 B) 8 C) $5\sqrt{3}$
D) 10 E) 15

Resolución

Piden $AC=x$.



00001670

Datos:

$$\frac{m\sphericalangle ABC}{3}=\frac{m\sphericalangle BAC}{2}=m\sphericalangle ACB \quad y$$

$AB=5$

Se traza $\overline{BQ}$, tal que $m\sphericalangle QBC=m\sphericalangle QCB=\alpha$

Por teorema del ángulo exterior en el $\triangle QBC$:

$m\sphericalangle AQB=\alpha+\alpha=2\alpha$

$m\sphericalangle AQB=m\sphericalangle ABQ \rightarrow AQ=AB=5$

$m\sphericalangle BAQ=m\sphericalangle BQA \rightarrow BQ=BA=5$

$\triangle BQC$: $QC=BQ=5$

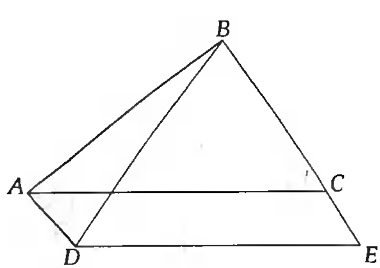
$\therefore \; x=10$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

En el gráfico mostrado, $AB=BD$ y los triángulos ABC y BDE son congruentes.

Calcule $\dfrac{m\sphericalangle BCA}{m\sphericalangle DAC}$.

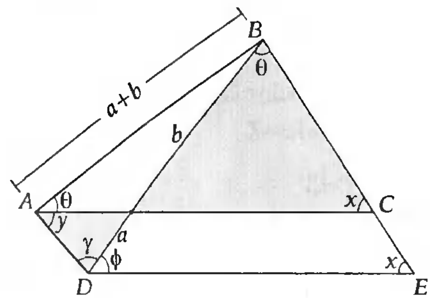


A) 1 B) 1,5 C) 0,5

D) 0,33 E) 2

Resolución

Piden $\dfrac{m\sphericalangle BCA}{m\sphericalangle DAC}$.



Dato: $AB=BD$

Además, los triángulos ABC y BDE son congruentes.

$AB=BD \rightarrow m\sphericalangle ACB=m\sphericalangle DEB=x$

Del gráfico:

$BE>BC \rightarrow \phi>\theta$

Luego

$m\sphericalangle DBE=\theta$

En la región sombreada, se cumple:

$x+\theta=y+\gamma$ (I)

$AB=BD \rightarrow m\sphericalangle ADB=m\sphericalangle DAB$

$\gamma=y+\theta$ (II)

De (II) en (I)

$x+\theta=y+(y+\theta)$

$x=2y$

$\dfrac{x}{y}=2$

$$\therefore \; \frac{m\sphericalangle BCA}{m\sphericalangle DAC}=2$$

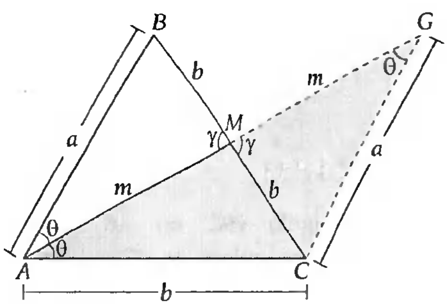
Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

En un triángulo ABC, en $\overline{BC}$ se ubica el punto M, tal que $m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle MAC$ y $BM=MC$. Se concluye así que:

A) AB puede ser igual a AC.
B) AB puede ser mayor que AC.
C) AB puede ser menor que AC.
D) $AB=AC$
E) $\triangle ABM \cong \triangle AMC$

Resolución



Datos:

$m\sphericalangle MAB=m\sphericalangle MAC$ y $BM=MC$

Se prolonga $\overline{AM}$ hasta G, tal que $MG=AM$

$\triangle AMB \cong \triangle GMC$ (L. A. L.)

$\rightarrow$ $GC=AB=a$

$m\sphericalangle BAM=m\sphericalangle CGM=\theta$

$m\sphericalangle GAC=m\sphericalangle AGC$

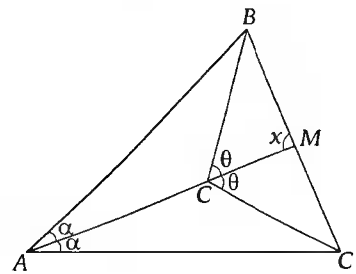
$\rightarrow$ $a=b$

$\therefore$ $AB=AC$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

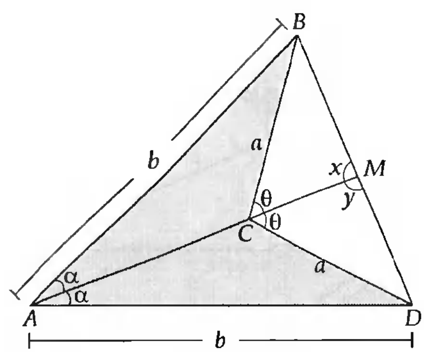
En el gráfico mostrado, se cumple



A) $x < 90°$
B) $x=90°$
C) $60° < x < 90°$
D) $90° < x < 120°$
E) $0° < x < 180°$

Resolución

Piden x.



Del gráfico:

$\triangle ACB \cong \triangle ACD$ (A. L. A.)

$\rightarrow$ $AB=AD$ y $BC=CD=a$

Notamos: $x+y=180°$ (I)

$\triangle BCM \cong \triangle DCM$ (L. A. L.)

$\rightarrow$ $x=y$ (II)

De (II) en (I)

$2x=180°$

$\therefore\ x=90°$

Clave **B**

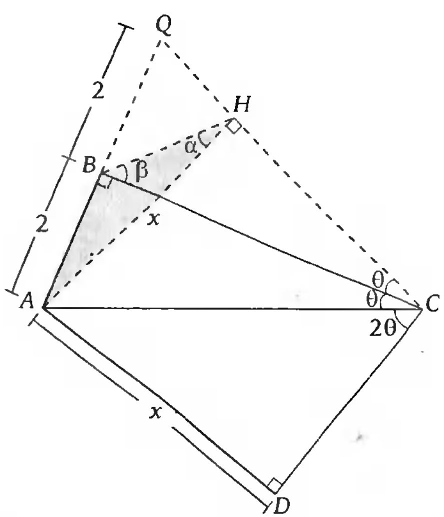
PROBLEMA N.° 13

En un cuadrilátero $ABCD$, donde
$m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ADC=90°$,
$m\sphericalangle ACD=2(m\sphericalangle ACB)$ y $AB=2$,
calcule AD dado que es un valor entero.

A) 4 B) 2 C) 3
D) 6 E) 5

Resolución

Piden el valor entero de AD.



Datos:

$m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ADC=90°$

$m\sphericalangle ACD=2(m\sphericalangle ACB)$ y $AB=2$

Se prolonga $\overline{AB}$ hasta Q, de manera que

$BQ=AB=2$

$\triangle ABC\cong\triangle QBC$ (L. A. L.)

$\rightarrow\ m\sphericalangle ACB=m\sphericalangle QCB=\theta$

Se traza $\overline{AH}\perp\overline{QC}$

$\triangle AHC\cong\triangle ADC$

$\rightarrow\ AH=AD=x$

$\triangle AHQ$: $AH<AQ\ \rightarrow\ x<4$ (I)

$\triangle ABH$: $m\sphericalangle ABH>m\sphericalangle AHB$

$\rightarrow\ x>2$ (II)

De (I) y (II)

$2<x<4\ \rightarrow\ 2<AD<4$

Por lo tanto, el valor entero de AD será 3.

Clave **C**

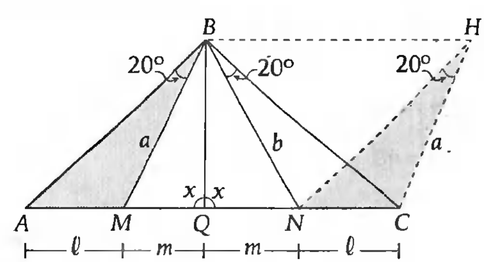
PROBLEMA N.° 14

En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubican los puntos consecutivos M, Q y N, tal que $AM=NC$. Si Q es punto medio de $\overline{MN}$ y $m\sphericalangle NBC=m\sphericalangle ABM=20°$, calcule la $m\sphericalangle BQC$.

A) 40° B) 80° C) 70°
D) 90° E) 100°

Resolución

Piden $m\sphericalangle BQC=x$.



Datos:

$AM=NC$, $m\sphericalangle NBC=m\sphericalangle ABM=20°$

Se construye el triángulo NHC, de modo que

$\triangle ABM \cong \triangle NHC$

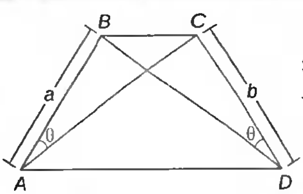
$\rightarrow$ $HC=BM=a$

y $m\sphericalangle NHC=m\sphericalangle ABM=20°$

Notamos

$\overline{BH}//\overline{NC}$

Nota



Si $\overline{BC}//\overline{AD}$

$\rightarrow$ $a=b$

Luego, en el ⏢$BNCH$ se tendrá

$BN=HC$ $\rightarrow$ $a=b$

$\triangle MBN$: $MB=BN$ y $MQ=QN$; (dato)

$\triangle MBQ \cong \triangle NBQ$ (L. L. L.)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle MQB=m\sphericalangle BQN=x$

$2x=180°$

$\therefore$ $x=90°$

Clave **D**

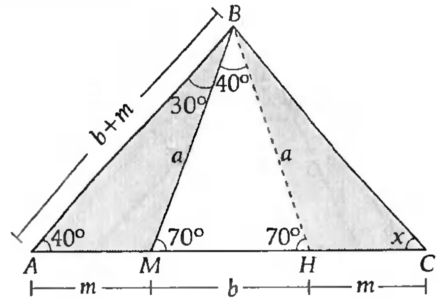
PROBLEMA N.° 15

Dado un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto M, tal que $CM=AB$. Si $m\sphericalangle BAC=40°$ y $m\sphericalangle BMC=70°$, calcule $m\sphericalangle \overline{BCA}$.

A) 30° B) 40° C) 35°
D) 70° E) 20°

Resolución

Piden $m\sphericalangle BCA=x$.



Datos:

$CM=AB$; $m\sphericalangle BAC=40°$

y $m\sphericalangle BMC=70°$

Se traza

$\overline{BH}$ tal que $m\sphericalangle BHM=70°$;

$MH=b$ y $HC=m$

$\triangle MBH$: $MB=BH=a$

$\triangle BAH$: $AB=AH=b+m$

Luego

$AM=m$

$\triangle BMA \cong \triangle BHC$(L. A. L.)

$\therefore$ $x=40°$

Clave **B**

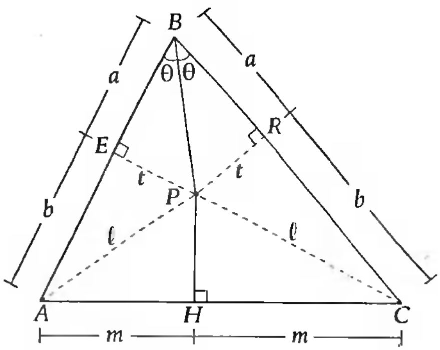
PROBLEMA N.° 16

Dado un triángulo ABC, en la región interior se ubica un punto P desde el cual se traza $\overline{PH}$ perpendicular a $\overline{AC}$. Si $AH=HC$ y $m\sphericalangle PBA=m\sphericalangle PBC$, asumimos que:

A) $AB=BC$
B) $AB=AC$
C) $BC=AC$
D) $BC \geq AB$
E) $AB=BC=AC$

Resolución

En el gráfico



Datos:

$m\sphericalangle PBA = m\sphericalangle PBC$

$\overline{PH} \perp \overline{AC}$ y $AH = HC = m$

$\rightarrow AP = PC = \ell$

Se traza

$\overline{PE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PR} \perp \overline{BC}$

$⊿BEP \cong ⊿BRP$ (A. L. A.)

$\rightarrow BE = BR = a$

$EP = PR = t$

$⊿APE$: $AE = \sqrt{\ell^2 - t^2}$ y

$⊿CPR$: $CR = \sqrt{\ell^2 - t^2}$

$⊿AEP \cong ⊿CRP$ (L. L. L.)

Luego

$AE = CR = b$

$AB = a + b$

$BC = a + b$

$\therefore AB = BC$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

Dadas las siguientes proposiciones, indique si son verdaderas o falsas:

I. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes.

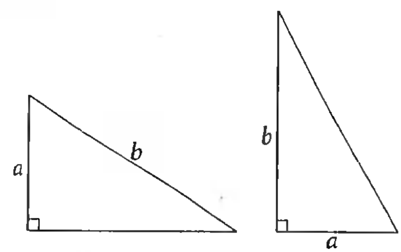
II. Si en un cuadrilátero $ABCD$, $BC = CD$ y $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle DAC$, entonces los triángulos ABC y ADC son congruentes.

III. Si en un cuadrilátero $ABCD$, $AC = BD$ y $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ACD = 90°$, concluimos que $AB = CD$.

A) VFV B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFV

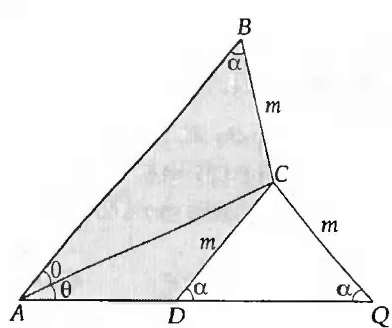
Resolución

I. Falsa



Los triángulos mostrados tienen dos lados respectivamente congruentes, pero dichos triángulos no son congruentes.

II. Falsa



Del gráfico

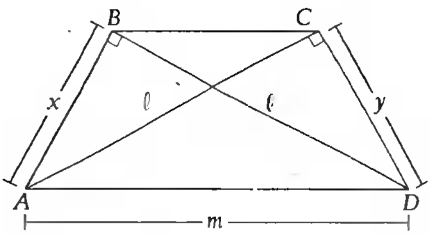
$BC=CD$

$m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle DAC$

Pero

$\triangle ABC \not\cong \triangle ADC$

III. **Verdadera**



Sea $AD=m$ y $AC=BD=\ell$

Por teorema de Pitágoras:

$x^2+\ell^2=m^2$ ($\triangle ABD$)

$y^2+\ell^2=m^2$ ($\triangle ACD$)

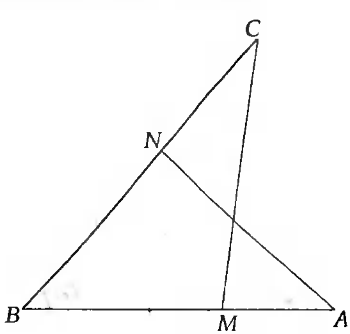
$\rightarrow\ x^2=y^2$

$\therefore\ x=y$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 18

En el gráfico mostrado, $AN=BM$ y $CM=BN$. Si los triángulos ABN y BCM son congruentes, señale la proposición correcta.



A) $AM=2(CN)$

B) $CN=2(AM)$

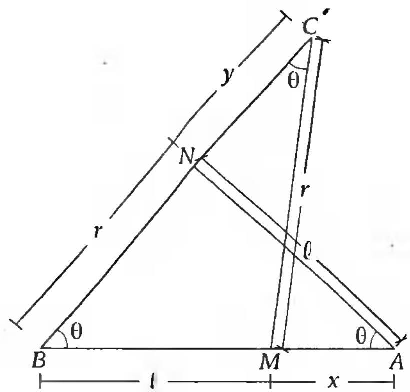
C) $AM=CN$

D) $AC=BM$

E) $AC=BN$

Resolución

En el gráfico



Por dato, los triángulos ABN y BCM son congruentes.

Además, $AN=BM$ y $CM=BN$

Por la congruencia:

$\ell+x=r+y$ (I)

$AN=BM\ \rightarrow\ m\sphericalangle ABN=m\sphericalangle BCM=\theta$

$CM=BN\ \rightarrow\ m\sphericalangle CBM=m\sphericalangle NAB=\theta$

$\triangle BNA$: $BN=NA$

$\rightarrow\ r=\ell$ (II)

De (II) en (I)

$\ell+x=\ell+y$

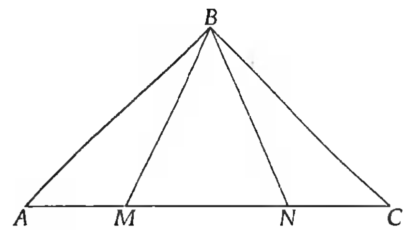
$x=y$

$\therefore\ AM=CN$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

En el gráfico mostrado, $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CBN$ y $AM=NC$. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:



I. $\triangle ABM \cong \triangle CBN$
II. $\triangle ABN \cong \triangle CBM$
III. $BM=BN$ y $AB=BC$
IV. $AB=BN$ y $BC=BM$

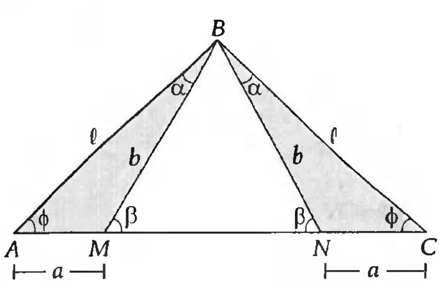
A) VVFF
B) VVVV
C) VFFV
D) FFFV
E) VVVF

Resolución

Datos:

$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CBN$

$AM=NC$



En el problema 14 se desarrolló un problema similar, en el cual se obtuvo:

$BM=BN$

$\rightarrow \triangle BMA \cong \triangle BNC$ (L. A. L.)

$AB=BC=\ell$

$m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BCN = \phi$

En el $\triangle AMB$

$\phi + \alpha = \beta$

$\rightarrow \beta > \phi$

En el $\triangle ABN$

$\beta > \phi$

$\rightarrow \ell > b$

Luego

$AB > BN$ y

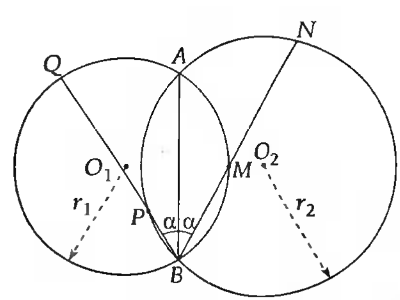
$BC > BM$

Así tendremos:

I. **Verdadero**
II. **Verdadero**
III. **Verdadero**
IV. Falso

Clave **E**

PROBLEMA N.° 20

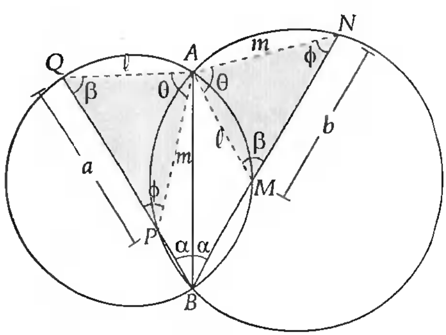


Del gráfico mostrado, señale la proposición correcta.

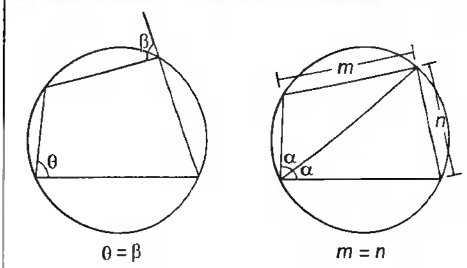
A) Si $r_1 > r_2 \rightarrow PQ > MN$
B) $PQ=MN \leftrightarrow r_1 > r_2$
C) Siempre $PQ=MN$
D) No siempre $PQ=MN$
E) $AQ=AN$ y $AM=AP$

Resolución

Del gráfico



Nota



Luego, en el problema

$m\measuredangle QBA = m\measuredangle ABM \rightarrow AQ=AM=\ell$

$m\measuredangle PBA = m\measuredangle ABN \rightarrow PA=AN=m$

$m\measuredangle AQB = m\measuredangle AMN = \beta$

$m\measuredangle ANB = m\measuredangle APQ = \phi$

$\triangle QAP \cong \triangle MAN$ (L. A. L.)

$\rightarrow a=b$

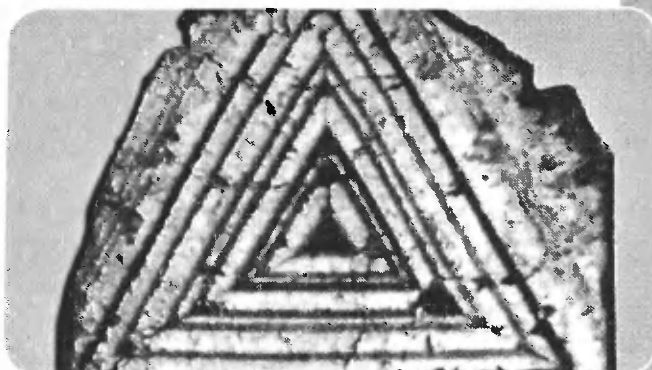
$\therefore PQ=MN$

Clave **C**

Capítulo

5

Triángulos



A diario, a nuestro alrededor, encontramos objetos que nos pueden dar la idea o la podemos asociar con algunas figuras geométricas; por ejemplo, los triángulos están presentes en un juego de reglas denominado escuadras, en las velas de los barcos, etc.

Existen muchos objetos de forma triangular y, por lo tanto, mantienen sus propiedades como la suma de sus medidas angulares igual a 180° o las longitudes de sus lados que permita su existencia.

En este capítulo se resuelven problemas de las propiedades fundamentales del triángulo, de las líneas notables que se pueden trazar en ella, así como del cálculo de longitudes de segmentos y medidas de ángulos, haciendo uso de las propiedades de congruencia.

Capítulo 5

Triángulos

TRIÁNGULOS PARTE I

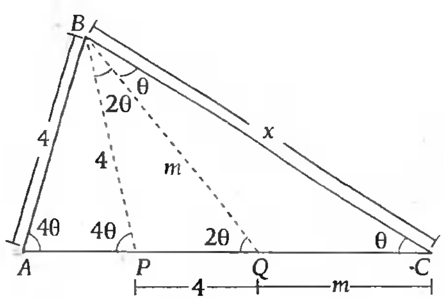
PROBLEMA N.° 1

En un triángulo ABC, m$\measuredangle BAC$=4(m$\measuredangle ACB$) y $AB=4$. Calcule el máximo valor entero de BC.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

Resolución

Piden el máximo valor entero de BC.



Datos:

m$\measuredangle BAC$=4(m$\measuredangle ACB$) y $AB=4$

Se traza $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, de modo que

m$\measuredangle BAP$=2(m$\measuredangle BQP$)=4θ

$\triangle ABP$: $BP=BA=4$

$\triangle BPQ$: $PQ=PB=4$

$\triangle BQC$: $QC=BQ=m$

Por teorema de existencia en el $\triangle BQC$:

$x < 2m$ (I)

$\triangle BQC$: $m < 8$

$\rightarrow$ $2m < 16$ (II)

De (I) en (II)

$x < 2m < 16$

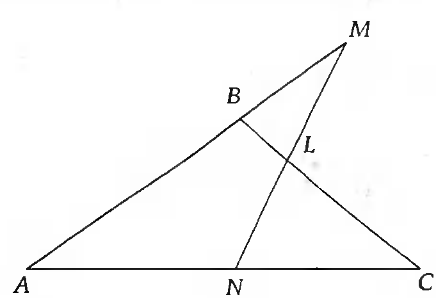
$\rightarrow$ $x < 16$; $BC > 16$

Por lo tanto, el mayor valor entero de BC será 15.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

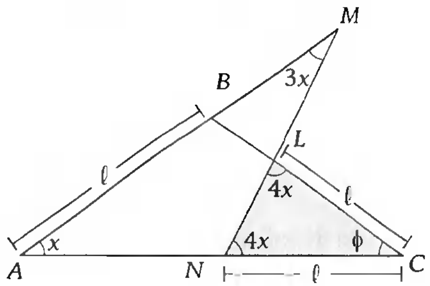
Del gráfico, $AB=LC=NC$ y m$\measuredangle BML$=3(m$\measuredangle CAB$). Calcule el mayor valor entero de m$\measuredangle CAB$.



A) 20° B) 21° C) 22°
D) 23° E) 24°

Resolución

Piden el mayor valor entero de m∢CAB.



Datos:

$AB=LC=NC$

m∢BML=3(m∢CAB)

En el △AMN

m∢$MNC=3x+x=4x$

$LC=NC$

→ m∢NLC=m∢$LNC=4x$

En el △NLC

$8x+\phi=180°$

→ $8x < 180°$

$x < 22°30'$

Por lo tanto, el mayor valor entero de x será 22°.

Clave **C**

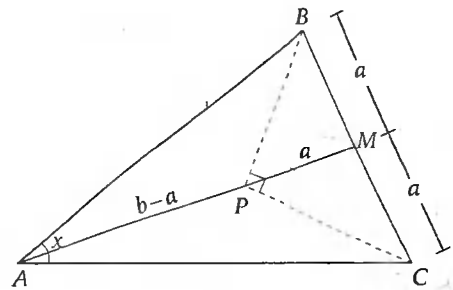
PROBLEMA N.° 3

En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$, tal que $BC < 2(AM)$. Calcule el máximo valor entero de m∢CAB.

A) 59°
B) 60°
C) 89°
D) 91°
E) 45°

Resolución

Piden el mayor valor entero de x.



Del dato: $BC < 2(AM)$

Sea: $BC=2a$ y $AM=b$

→ $2a < 2b$

$a < b$

Se ubica P en $\overline{AM}$ tal que $PM=a$

Luego, $AP=b-a$

△BPC: $BM=MC=PM=a$ → m∢$BPC=90°$

Del ∡$ABPC$: m∢BAC < m∢BPC

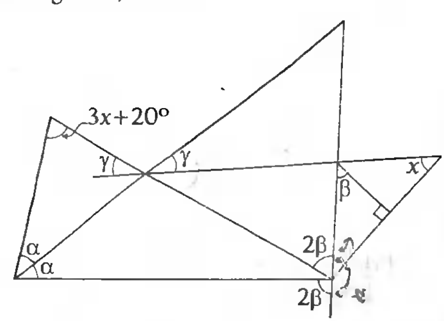
$x < 90°$

Por lo tanto, el mayor valor entero de x será 89°.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

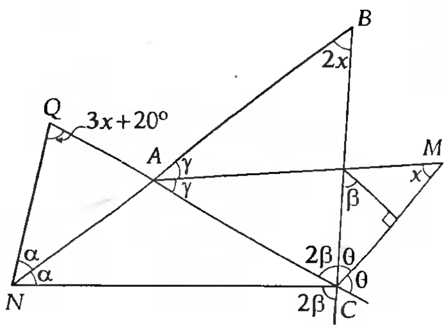
En el gráfico, calcule x.



A) 18°
B) 20°
C) 22°
D) 26°
E) 28°

Resolución

Piden x.



Del gráfico:

$\beta+\theta=90°$

$\rightarrow\ \theta=90°-\beta$

Luego, $\overline{AM}$ y $\overline{CM}$ bisecan un ángulo interior y un ángulo exterior en el triángulo ABC.

$\rightarrow\ m\measuredangle ABC=2(m\measuredangle AMC)$

$m\measuredangle ABC=2x$ (I)

De igual modo, en el triángulo

$m\measuredangle NQC=2(m\measuredangle ABC)$

$\rightarrow\ 3x+20°=2(m\measuredangle ABC)$ (II)

De (I) en (II)

$3x+20°=2(2x)$

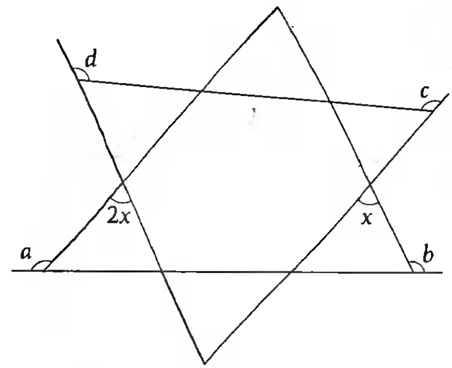
$20°=4x-3x$

$\therefore\ x=20°$

Clave B

PROBLEMA N.° 5

Del gráfico, $a+b+c+d>546°$. Calcule el menor valor entero de x.

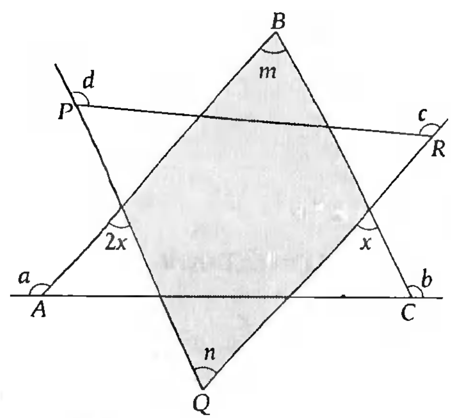


A) 54° B) 63° C) 60°

D) 62° E) 98°

Resolución

Piden el menor valor entero de x.



Del dato:

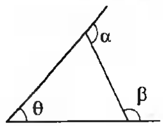
$a+b+c+d>546°$

Del gráfico (región sombreada)

$2x+x=m+n$

$\rightarrow\ 3x=m+n$ (I)

Nota



$\boxed{\theta+180^\circ=\alpha+\beta}$

En el $\triangle ABC$

$m+180^\circ=a+b$

En el $\triangle PQR$

$n+180^\circ=c+d$

$\rightarrow\ m+n+360^\circ=a+b+c+d$ (II)

De (I) en (II)

$3x+360^\circ=a+b+c+d$

$\rightarrow\ 3x+360^\circ>546^\circ$

$3x>186^\circ$

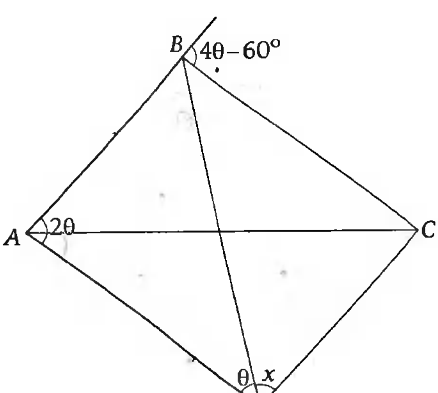
$x>62^\circ$

Por lo tanto, el mínimo valor entero de x será 63°.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

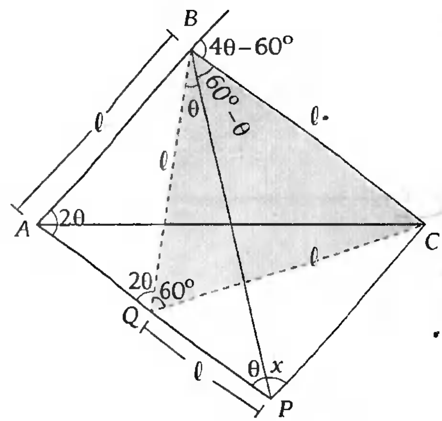
En el gráfico, $AB=BC$. Calcule x.



A) 28° B) 31° C) 30°
D) 26° E) 24°

Resolución

Piden x.



Dato:

$AB=BC$

Se traza

$\overline{BQ}$ de manera que $m\sphericalangle BQA=2\theta$

$\rightarrow\ AB=BQ=QP=\ell$

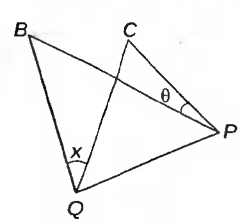
$m\sphericalangle QBC=60^\circ$ y

$BQ=BC=\ell$

$\triangle QBC$=equilátero

$\rightarrow\ QC=\ell$

Nota



En el gráfico, si $QB=QC=QP$

$\rightarrow\ \boxed{x=2\theta}$

En el problema

$QB=QC=QP=\ell$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle BQC=2$(m$\sphericalangle BPC$)

$60°=2x$

$\therefore\ x=30°$

Clave **C**

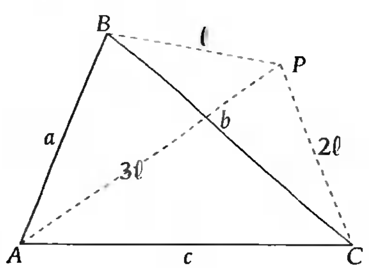
PROBLEMA N.° 7

En un triángulo ABC se ubica el punto P, exterior relativo al lado BC. Las longitudes de los segmentos PB, PC y PA están en la razón de 1, 2 y 3. Calcule la suma del mayor y menor valor entero que puede tomar AP, si el perímetro de la región triangular ABC es 39 cm.

A) 38 cm B) 39 cm C) 40 cm
D) 42 cm E) 44 cm

Resolución

Piden $AP_{\text{ent. máx}}+AP_{\text{ent. mín}}=x$.



Del dato:

$$PB=\frac{PC}{2}=\frac{PA}{3}$$

$2p_{\blacktriangle ABC}=39$ cm

$\rightarrow\ a+b+c=39$ cm

Por teorema de existencia en los triángulos APB, BPC y APC tendremos:

$2\ell < a < 4\ell$

$\ell < b < 3\ell$

$\ell < c < 5\ell$

$\rightarrow\ 4\ell < a+b+c < 12\ell$

Del gráfico:

$$AP=3\ell\ \rightarrow\ \ell=\left(\frac{AP}{3}\right)$$

$$4\left(\frac{AP}{3}\right) < 39\text{ cm} < 12\left(\frac{AP}{3}\right)$$

$$4\left(\frac{AP}{3}\right) < 39\text{ cm}\ \rightarrow\ AP < 29{,}25\text{ cm}$$

$$39\text{ cm} < 4(AP)\ \rightarrow\ AP > 9{,}75\text{ cm}$$

Luego

$AP_{\text{ent. máx}}=29$ cm

$AP_{\text{ent. mín}}=10$ cm

$\therefore\ x=29\text{ cm}+10\text{ cm}=39\text{ cm}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 8

Dado un triángulo, la longitud de dos de sus lados son a y b. Calcule el mayor valor entero de la longitud de la mediana relativa al tercer lado sabiendo que a y b son pares.

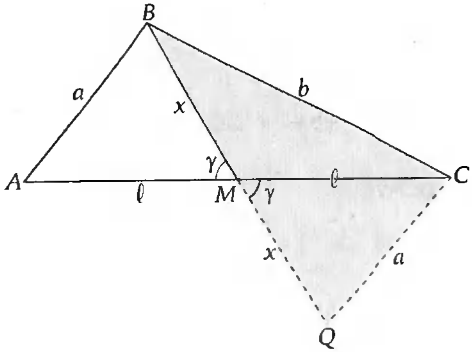
A) $\dfrac{a+b+4}{2}$ B) $\dfrac{a+b}{2}$

C) $\dfrac{a+b-2}{2}$

D) $\dfrac{a+b+2}{2}$ E) $\dfrac{a+b-4}{2}$

Resolución

Piden el mayor valor entero de x.



Datos:

$AB=a$

$BC=b$

Se prolonga $\overline{BM}$ hasta Q de manera que

$MQ=MB=x$

$\triangle AMB \cong \triangle CMQ$ (L. A. L.)

$\rightarrow\ QC=AB=a$

Por teorema de existencia en el $\triangle BCQ$

$2x < a+b$

$$x<\frac{a+b}{2}$$

Por dato, a y b son números pares.

$$\rightarrow\ \left(\frac{a+b}{2}\right)\in\mathbb{Z}$$

Por lo tanto, el mayor valor entero de x será

$$\left(\frac{a+b}{2}-1\right)\ \text{ó}\ \left(\frac{a+b-2}{2}\right)$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

En un triángulo ABC se traza la altura BH ($H\in\overline{AC}$) y las cevianas interiores BL y BS, tal que $L\in\overline{AH}$ y $S\in\overline{HC}$, $AL=a$, $LS=b$, $CS=c$, $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle HBS)$ y $m\sphericalangle ACB=2(m\sphericalangle HBL)$. Calcule $AB+BC$.

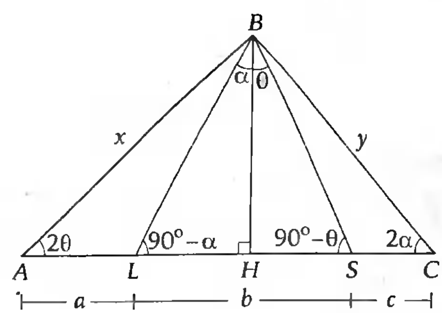
A) $\dfrac{a+2b+c}{2}$ B) $a+3b+c$

C) $2a+b+c$

D) $a+2b+c$ E) $a+b+2c$

Resolución

Piden $AB+BC=x+y$.



Datos:

$AL=a$, $LS=b$ y $SC=c$

Además

$m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle HBS)=2\theta$

$m\sphericalangle ACB=2(m\sphericalangle HBL)=2\alpha$

Del gráfico:

$m\sphericalangle ABS=m\sphericalangle ASB=90°-\theta$

$\rightarrow\ AB=AS$

$x=a+b$ (I)

$m\sphericalangle BLC = m\sphericalangle LBC = 90° - \alpha$

$\rightarrow\ BC = LC$

$y = b + c$ (II)

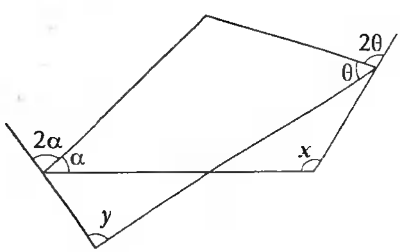
De (I) + (II)

$\therefore\ x + y = a + 2b + c$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

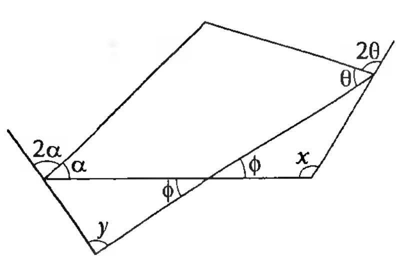
Del gráfico, $\theta - \alpha < 29°$. Calcule el mayor valor entero de $(x - y)$.



A) 76° B) 87° C) 88°
D) 89° E) 86°

Resolución

Piden el mayor valor entero de $(x - y)$.



Por dato:

$(\theta - \alpha) < 29°$

Por el teorema del ángulo exterior:

$x + \phi = 3\theta$ (I)

$y + \phi = 3\alpha$ (II)

De (I) − (II)

$x - y = 3(\theta - \alpha)$

$\rightarrow\ (\theta - \alpha) = \dfrac{x - y}{3}$

Reemplazando en el dato:

$\dfrac{x - y}{3} < 29°$

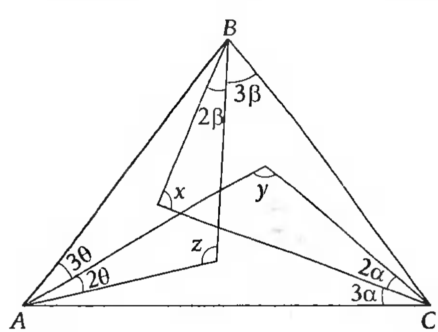
$x - y < 87°$

Por lo tanto, el mayor valor entero de $(x - y)$ será 86°.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

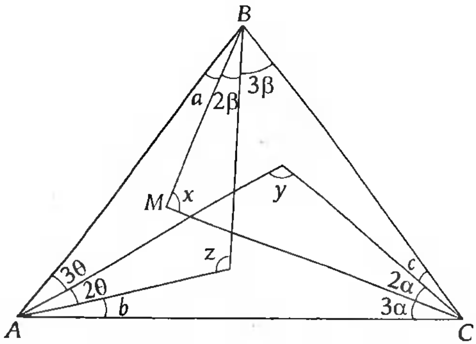
En el gráfico, $\alpha + \beta + \theta = 25°$. Calcule $x + y + z$.



A) 202° B) 242° C) 310°
D) 201° E) 301°

Resolución

Piden $x+y+z$.



Del dato:

$$\alpha+\beta+\theta=25°$$

En el $\measuredangle ABMC$

$$x=a+(5\theta+b)+3\alpha \qquad \text{(I)}$$

Análogamente tendremos

$$y=5\beta+3\theta+a+c \qquad \text{(II)}$$

$$z=5\alpha+3\beta+b+c \qquad \text{(III)}$$

Sumando (I), (II) y (III)

$$x+y+z=8(\alpha+\beta+\theta)+2(a+b+c)$$

$$\rightarrow\ x+y+z=2(5\theta+5\beta+5\alpha+a+b+c)-$$

$$-2(\theta+\alpha+\beta) \qquad \text{(IV)}$$

$\triangle ABC$: $5\theta+5\beta+5\alpha+a+b+c=180°$ (V)

De (V) en (IV)

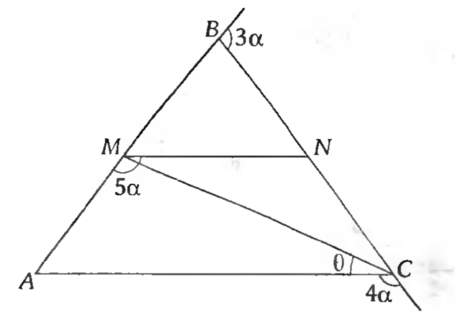
$$x+y+z=2(180°)-2(25°)$$

$\therefore\ x+y+z=310°$

Clave C

PROBLEMA N.° 12

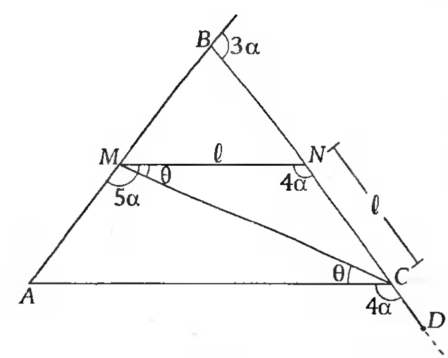
Según el gráfico, $\overline{MN}//\overline{AC}$ y $MN=NC$. Calcule θ.



A) 28° B) 30° C) 32°
D) 34° E) 36°

Resolución

Piden θ.



Datos:

$\overline{MN}//\overline{AC}$ y $MN=NC$

$m\measuredangle NMC=m\measuredangle ACM=\theta$

$m\measuredangle MNC=m\measuredangle ACD=4\alpha$

$MN=NC \rightarrow m\measuredangle MCN=m\measuredangle CMN=\theta$

$\triangle MNC$: $2\theta+4\alpha=180°$ (I)

$\triangle MBN$: $3\alpha+4\alpha+5\alpha=360°$

$12\alpha=360°$

$\alpha=30°$ (II)

De (II) en (I)

$2\theta+4(30°)=180°$

$\therefore\ \theta=30°$

Clave **B**

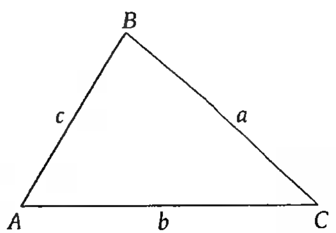
PROBLEMA N.° 13

Indique el número de triángulos escalenos cuyos lados son enteros, sabiendo que el perímetro de la región triangular es menor que 13.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Piden el número de triángulos escalenos de lados enteros cuyos perímetros ($2p$) sean menores que 13.



Del dato:

$2p < 13$

$\rightarrow\ a+b+c<13$ (I)

Sea

$a > b > c$

Por teorema de existencia en el $\triangle ABC$:

$a < b+c$

$\rightarrow\ 2a < a+b+c$ (II)

De (I) y (II)

$2a < a+b+c < 13$

$a; b; c \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow\ a+b+c \in \mathbb{Z}$

Luego

$2a < 12$

$\rightarrow\ a < 6$ (III)

Además

$c > a-b > 0$

$\rightarrow\ c > 1$ (IV)

De (III) y (IV)

$6 > a > b > c > 1$

Sea $c=2$

$\rightarrow\ 6 > a > b > 2$

Si $b=3$

$\rightarrow\ a=4$ (V)

Si $b=4$

$\rightarrow\ a=5$ (VI)

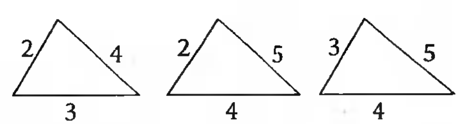
Sea $c=3$

$\rightarrow\ 6 > a > b > 3$

Si $b=4$

$\rightarrow\ a=5$ (VII)

De (V), (VI) y (VII)



Por lo tanto, el número de triángulos es 3.

Clave **C**

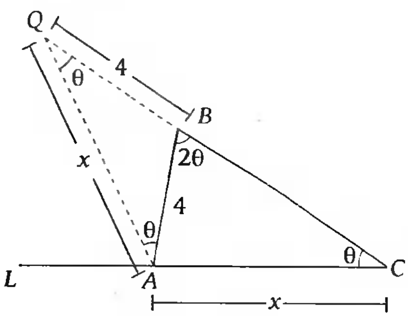
PROBLEMA N.° 14

En un triángulo ABC se prolonga $\overline{CA}$ hasta el punto L, tal que m∢LAB=3(m∢ACB) y AB=4. Indique entre qué valores se encuentra comprendido AC.

A) ⟨0; 8⟩ B) ⟨4; 8⟩ C) ⟨2; 8⟩
D) ⟨2; 16⟩ E) ⟨8; 16⟩

Resolución

Piden $AC=x$.



De los datos: m∢LAB=3(m∢ACB), AB=4

Se prolonga $\overline{CB}$ hasta Q

m∢AQB=θ

m∢AQC=m∢ACQ

→ $AQ=AC=x$

△QAB: $QB=AB=4$

Por teorema de existencia en el △AQB

$x < 8$ (I)

Por teorema de correspondencia en el △ABC

m∢ABC > m∢ACB → $x > 4$ (II)

De (I) y (II)

$4 < x < 8$

∴ $x \in \langle 4; 8\rangle$

Clave **B**

TRIÁNGULOS PARTE II

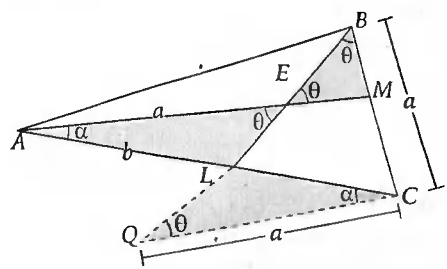
PROBLEMA N.° 15

En un triángulo ABC, se trazan la mediana BL y la ceviana interior AM, las cuales se intersecan en E. Si $AE=BC$, calcule BM/ME.

A) 1/2 B) 2 C) 1
D) 3/2 E) 2/3

Resolución

Piden $\dfrac{BM}{ME}$.



Del dato, $\overline{BL}$ es mediana en el △ABC, además

$AE=BC$

Prolongamos $\overline{BL}$ hasta Q, de manera que

$\overline{QC}//\overline{AE}$

→ m∢EAL=m∢QCL=α

m∢AEL=m∢CQL=θ

△AEL ≅ △CQL (A. L. A.)

→ $QC=AE=a$

$BC=QC$ → m∢QBC=m∢BQC=θ

m∢EBM=m∢BEM=θ

→ $BM=ME$

∴ $\dfrac{BM}{ME}=1$

Clave **C**

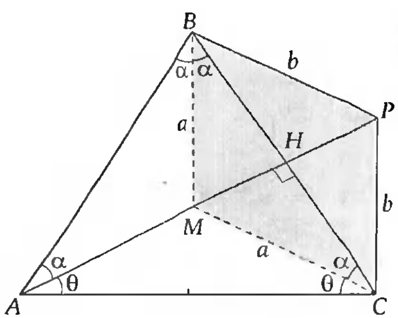
PROBLEMA N.° 16

Dado un triángulo $ABC(AB=BC)$, se ubica el punto P en la región exterior relativo a $\overline{BC}$, tal que $BP=PC$ y $m\measuredangle ABC=2(m\measuredangle BAP)$. Calcule $m\measuredangle BAP$.

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

Resolución

Piden $m\measuredangle BAP=\alpha$.



Datos:

$m\measuredangle ABC=2(m\measuredangle BAP)$

$BP=PC$

Trazamos $\overline{BM}$, tal que

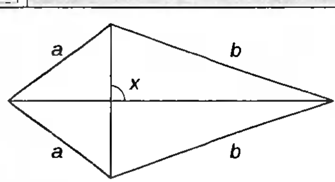
$m\measuredangle MBA=m\measuredangle MBC=\alpha$

$\triangle MBA \cong \triangle MBC$ (L. A. L.)

$m\measuredangle MCB=m\measuredangle MAB=\alpha$

$\rightarrow$ $MC=MA=a$

Nota



En el gráfico se cumple: $x=90°$

Luego, en el problema

$MB=MC$ y $BP=PC$

$\rightarrow$ $m\measuredangle MHB=90°$

⊿ AHB

$\alpha+2\alpha=90°$

$\therefore$ $\alpha=30°$

Clave **C**

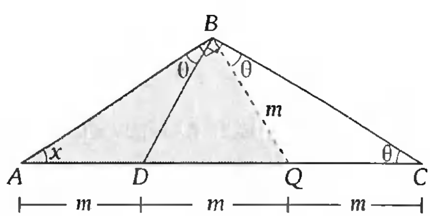
PROBLEMA N.° 17

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $m\measuredangle DBC=90°$, $DC=2(AD)$ y $m\measuredangle ABD=m\measuredangle BCA$. Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

Resolución

Piden $m\measuredangle BAC=x$.



Datos:

$DC=2(AD)$

$m\measuredangle ABD=m\measuredangle BCA$

Sea

$AD=$m

$\rightarrow$ $DC=2$ m

Trazamos

$\overline{BQ}\,/\,DQ=QC=m$

Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en el ⊾DBC:

$$BQ=\frac{DC}{2}$$

$\rightarrow$ $BQ=m$

$\triangle BQC = BQ=QC=m$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle QBC=m\sphericalangle QCB=\theta$

Luego

$m\sphericalangle ABQ=90^\circ$

En el ⊾QBA

$AQ=2(BQ)$

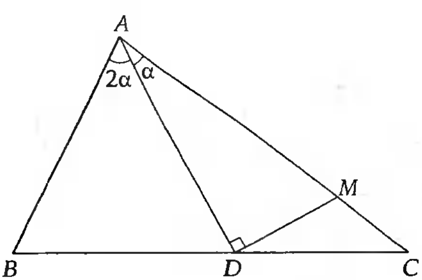
En el ⊾QBA es notable de 30° y 60°

$\therefore$ $x=30^\circ$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

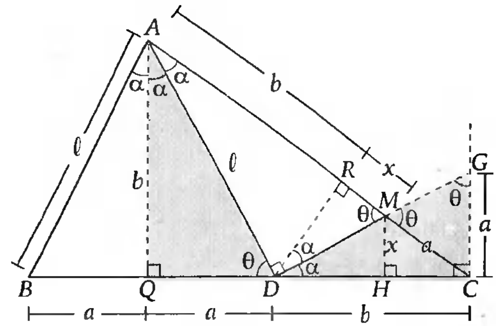
En el gráfico, $BD=2(MC)$, $AB=AD$ y $AM-DC=12$. Calcule la distancia de M a $\overline{BC}$.



A) 8
B) 4
C) 6
D) 12
E) 18

Resolución

Piden $MH=x$.



Por dato:

$BD=2(MC)$

Sea

$MC=a \rightarrow BD=2a$

Se traza $\overline{AQ}\perp\overline{BD}$

Por dato:

$AB=AD \rightarrow BQ=QD=a$

Prolongamos $\overline{DM}$ hasta G, de manera que

$m\sphericalangle GCD=90^\circ$

$\triangle MCG$: $MC=GC=a$

⊾$GCD \cong$ ⊾DQA (A.L.A.)

$\rightarrow$ $DC=AQ=b$

Al trazar $\overline{DR}\perp\overline{AM}$, por teorema de la bisectriz:

$MH=MR=x$

⊾$AQD \cong$ ⊾ARD (A.L.A.)

$\rightarrow$ $AR=AQ=b$

Dato:

$AM-DC=12 \rightarrow (b+x)-b=12$

$\therefore$ $x=12$

Clave **D**

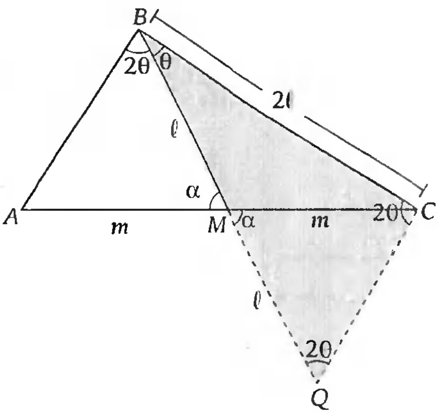
PROBLEMA N.° 19

En el triángulo ABC se traza la mediana BM. Si $m\measuredangle ABM=2(m\measuredangle MBC)$ y $BC=2(BM)$, calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 48° B) 36° C) 30°
D) 28° E) 37°

Resolución

Piden $m\measuredangle MBC=\theta$.



Datos:

$BC=2(BM)$, $m\measuredangle ABM=2(m\measuredangle MBC)$

Se prolonga

$\overline{BM}$ hasta Q, de manera que $MQ=MB=\ell$

$\triangle QMC \cong \triangle BMA$ (L.A.L.)

$\rightarrow\ m\measuredangle MQC=m\measuredangle MBA=2\theta$

$\triangle QBC$: $BQ=BC=2\ell$

$\rightarrow\ m\measuredangle BCQ=m\measuredangle BQC=2\theta$

$\triangle QBC$:

$\theta+2\theta+2\theta=180°$

$5\theta=180°$

$\therefore\ \theta=36°$

Clave **B**

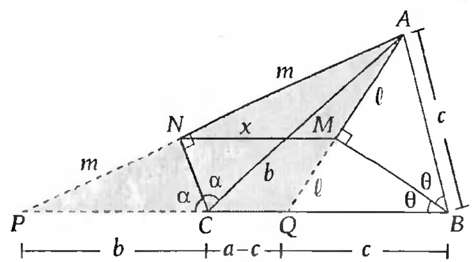
PROBLEMA N.° 20

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interior y exterior del vértice B y C, respectivamente. Desde A se trazan las perpendiculares $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ a dichas bisectrices (M y N pertenecen a las bisectrices). Si $BC+AC-AB=p$, calcule MN.

A) p B) $p/2$ C) $p/3$
D) $p/4$ E) $p/5$

Resolución

Piden $MN=x$.



Dato: $BC+AC-AB=p$

Sea $BC=a$, $AC=b$ y $AB=c$

Reemplazando en el dato: $a+b-c=p$

Se prolonga $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ hasta P y Q, respectivamente.

$\triangle AMB \cong \triangle QMB$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ QB=AB=c$ y $QM=MA=\ell$

$\triangle CNA \cong \triangle CNP$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ PC=AC=b$ y $NP=NA=m$

$\overline{MN}$: base media del triángulo APQ

$$MN=\frac{PQ}{2} \rightarrow x=\frac{a+b-c}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{p}{2}$$

Clave **B**

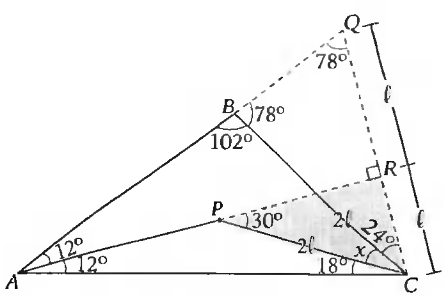
PROBLEMA N.° 21

Se tiene un triángulo ABC en el cual se ubica el punto interior P, tal que $PC=BC$, $m\sphericalangle PAB=m\sphericalangle PAC=12°$ y $m\sphericalangle ABC=102°$. Calcule $m\sphericalangle PCB$.

A) 18° B) 24° C) 36°
D) 30° E) 42°

Resolución

Piden $m\sphericalangle PCB=x$.



Datos:

$CP=BC$, $m\sphericalangle PAB=m\sphericalangle PAC=12°$ y

$m\sphericalangle ABC=102°$

Se traza $\overline{CQ}$, de manera que $m\sphericalangle CQB=78°$

$m\sphericalangle QBC=m\sphericalangle BQC=78°$

$\rightarrow\ QC=BC=2\ell$

$m\sphericalangle ARQ=90°\ \rightarrow\ QR=RC=\ell$

Luego

$PC=2(CR)$

⊾PRC: notable de 30° y 60°

$\rightarrow\ m\sphericalangle RPC=30°;\ m\sphericalangle PCA=18°$

⊾PRC: $m\sphericalangle PCR=60°$

$\rightarrow\ x+24°=60°$

$\therefore\ x=36°$

Clave **C**

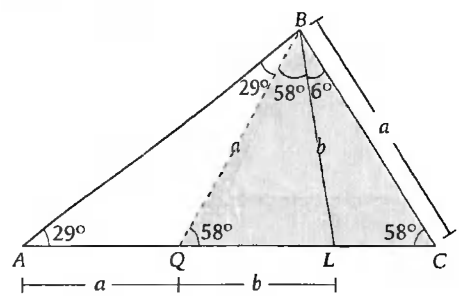
PROBLEMA N.° 22

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BL, tal que $m\sphericalangle LBC=6°$, $m\sphericalangle BCA=58°$ y $AL=LB+BC$. Calcule $m\sphericalangle ABL$.

A) 60° B) 69° C) 78°
D) 87° E) 84°

Resolución

Piden $m\sphericalangle ABL$.



Datos: $m\sphericalangle LBC=6°$, $m\sphericalangle BCA=58°$ y

$AL=LB+BC$

Sea $BC=a$ y $BL=b$

$\rightarrow\ AL=a+b$

Se traza $\overline{BQ}$, de manera que $m\sphericalangle BQC=58°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle QBL=58°$

Luego

$QL=BL=b$

$\rightarrow\ AQ=a$

$\triangle QBC$: isósceles de base $\overline{QC}$

$\rightarrow\ QB=BC=a$

$AQ=QB\ \rightarrow\ m\sphericalangle QAB=m\sphericalangle QBA=29°$

$m\sphericalangle ABL=29°+58°$

$\therefore\ m\sphericalangle ABL=87°$

Clave **D**

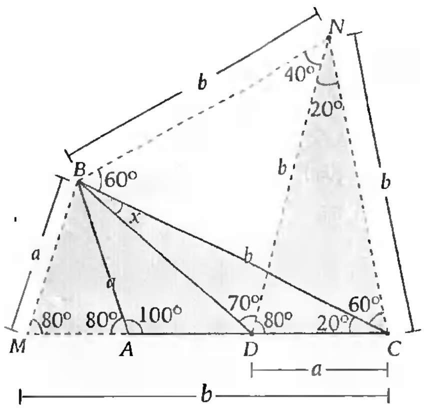
PROBLEMA N.° 23

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que
$AB=CD$ y $m\measuredangle BAC=5(m\measuredangle BCA)=100°$.
Calcule la $m\measuredangle DBC$.

A) 10° B) 12° C) 14°
D) 16° E) 18°

Resolución

Piden $m\measuredangle DBC=x$.



Datos: $AB=CD$

$m\measuredangle BAC=5(m\measuredangle BCA)=100°$

Se prolonga $\overline{CA}$ hasta M, tal que $m\measuredangle BMC=80°$

Luego $MC=BC=b$

Se ubica el punto N, exterior y relativo a $\overline{BC}$, tal que el triángulo BNC sea equilátero.

$\rightarrow\ NB=NC=b$

$\triangle NCD \cong \triangle CMB$ (L. A. L.)

$\rightarrow\ ND=BC=b$

$m\measuredangle DNC=20°$

$\rightarrow\ m\measuredangle BND=40°$

Luego

$m\measuredangle NBD=70° \ \rightarrow\ 60°+x=70°$

$\therefore\ x=10°$

Clave **A**

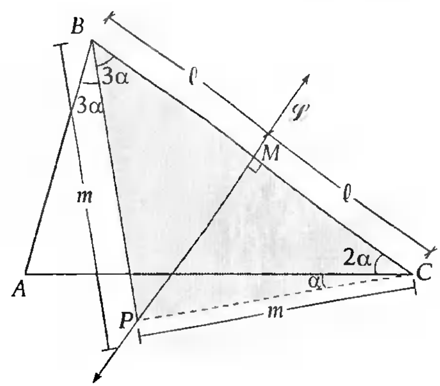
PROBLEMA N.° 24

En un triángulo ABC, la $m\measuredangle ABC=3(m\measuredangle ACB)$. Si la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BM}$ en P, calcule el mayor valor entero de $m\measuredangle PCA$. Considere que el triángulo ABC es acutángulo.

A) 13° B) 14° C) 15°
D) 29° E) 30°

Resolución

Piden el mayor valor entero de $m\measuredangle PCA$.



Dato: $m\measuredangle ABC=3(m\measuredangle ACB)$

Sea $m\measuredangle ACB=2\alpha\ \rightarrow\ m\measuredangle ABC=6\alpha$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{BC}$

$\rightarrow\ PB=PC;\ m\measuredangle PCB=m\measuredangle PBC=3\alpha$

Luego, $m\measuredangle PCA=\alpha$

Por dato, el triángulo ABC es acutángulo.

$m\sphericalangle ABC < 90°$

$\rightarrow\ 6\alpha < 90°$

$\alpha < 15°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle PCA < 15°$

Por lo tanto, el mayor valor entero de $m\sphericalangle PCA$ será 14°.

Clave **B**

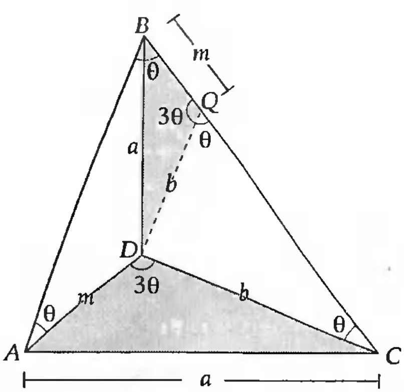
PROBLEMA N.° 25

En el interior de un triángulo ABC se ubica el punto D, tal que $BD=AC$.
Si $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle BAD=m\sphericalangle BCD$, calcule la $m\sphericalangle BAD$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 20° E) 45°

Resolución

Piden $m\sphericalangle BAD=\theta$.



Datos:

$m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle BAD=m\sphericalangle BCD$

Además $BD=AC$

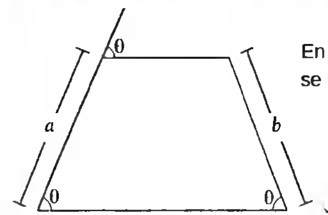
Se traza $\overline{DQ}//\overline{AB}$

$m\sphericalangle DQC=m\sphericalangle ABC=\theta$

$m\sphericalangle DQC=m\sphericalangle DCQ=\theta$

$\rightarrow\ DQ=DC=b$

Nota



En el gráfico se cumple: $a=b$

Luego, en el problema: $AD=BQ=m$

$\triangle BQD \cong \triangle ADC$ (L. L. L.)

$\rightarrow\ m\sphericalangle BQD=m\sphericalangle ADC=3\theta$

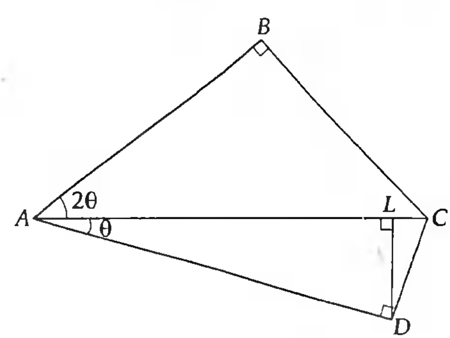
$4\theta=180°$

$\therefore\ \theta=45°$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 26

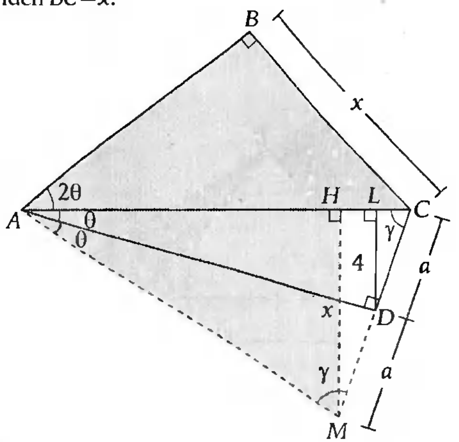
Del gráfico, $DL=4$ y $m\sphericalangle ADC=90°$. Calcule BC.



A) 4 B) 2 C) 6
D) 8 E) 12

Resolución

Piden $BC=x$.



Del dato: $DL=4$

Prolongamos CD hasta M, tal que $MD=DC=a$

$\triangle MAC$: isósceles ($AM=AC$)

$m\sphericalangle MAD=m\sphericalangle CAD=\theta$

Se traza $\overline{MH}\perp\overline{AC}$

$\triangle ABC\cong\triangle AHM$ (A. L. A.) $\rightarrow$ $HM=BC=x$

$\triangle MHC$: $\overline{DL}//\overline{MH}$

y $MD=DC$ $\rightarrow$ $MH=2(LD)$

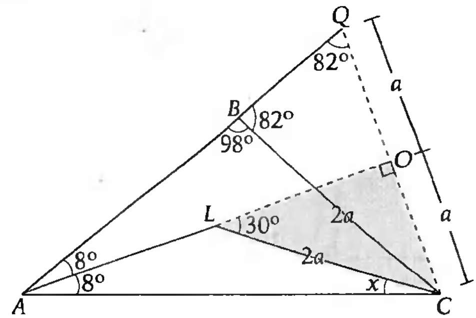
Luego, $x=2(LD)$

$\therefore$ $x=8$

Clave **D**

Resolución

Piden $m\sphericalangle LCA=x$



Datos:

$BC=CL$, $m\sphericalangle ABC=98°$

$m\sphericalangle BAL=m\sphericalangle LAC=8°$

Prolongamos $\overline{AB}$ hasta Q, tal que

$m\sphericalangle AQC=82°$

$\triangle QAC$: isósceles ($AQ=AC$)

$m\sphericalangle AOQ=90°$; $OQ=OC=a$

$\triangle BCQ$: $BC=QC=2a$

Luego, $LC=BC=2a$

$\triangle LOC$: $LC=2(OC)$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle OLC=30°$

$\triangle ALC$: $x+8°=30°$

$\therefore$ $x=22°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Dado un triángulo ABC, en la región interior se ubica el punto L, tal que $BC=CL$, $m\sphericalangle ABC=98°$ y $m\sphericalangle BAL=m\sphericalangle LAC=8°$. Calcule $m\sphericalangle LCA$.

A) 20° B) 22° • C) 24°
D) 30° E) 15°

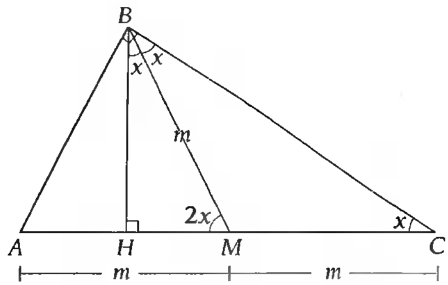
PROBLEMA N.° 28

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), donde se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$, tal que $m\sphericalangle HMB=m\sphericalangle HBC$. Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 45° B) 37° C) 30°
D) 36° E) 22° 30'

Resolución

Piden m∢$ACB=x$.



Por dato, $\overline{BM}$ es mediana

$MC=BM$

→ m∢MBC=m∢$MCB=x$

Por teorema del ángulo exterior en $\triangle MBC$

m∢$HMB=2x$

Dato:

m∢HBC=m∢HMB

→ m∢$HBC=2x$

⊿BHM: $3x=90°$

∴ $x=30°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

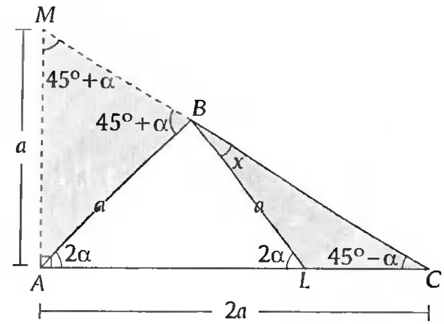
En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BL}$, tal que $AC=2(AB)=2(BL)$ y m∢BAC+2(m∢BCA)=90°. Calcule m∢LBC.

A) 6° B) $\frac{17°}{2}$ C) $\frac{19°}{2}$

D) $\frac{21°}{2}$ E) $\frac{23°}{2}$

Resolución

Piden m∢$LBC=x$.



Datos: $AC=2(AB)=2(BL)$

m∢BAC+2(m∢BCA)=90°

Sea m∢$BAC=2\alpha$ → m∢$ACB=45-\alpha$

Prolongamos $\overline{CB}$ hasta M, de modo que

m∢$AMC=45°+\alpha$

→ m∢$MAC=90°$;

m∢$ABM=45°+\alpha$

$\triangle MAB$: $AM=AB=a$

⊿MAC: $AC=2(AM)$

→ m∢$ACM=\frac{53°}{2}$

$45°-\alpha=\frac{53°}{2}$

→ $\alpha=\frac{37°}{2}$ (I)

$\triangle LBC$: $x+(45°-\alpha)=2\alpha$

→ $x=3\alpha-45°$ (II)

De (I) en (II)

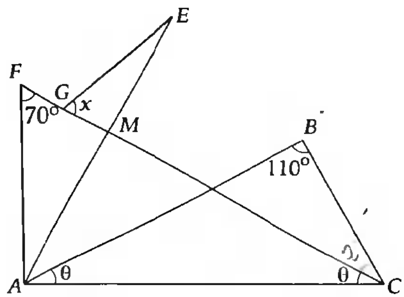
$$x=3\left(\frac{37°}{2}\right)-45°$$

∴ $x=\frac{21°}{2}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

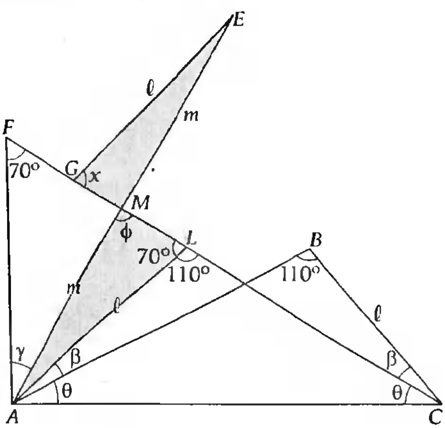
En el gráfico, $BC=EG$ y $AM=ME$. Calcule x.



A) 70° B) 75° C) 80°
D) 85° E) 65°

Resolución

Piden x.



Datos:

$BC=EG$ y $AM=ME$

Se traza $\overline{AL}$, de manera que $m\sphericalangle ALC=110°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle LAB=m\sphericalangle BCL=\beta$

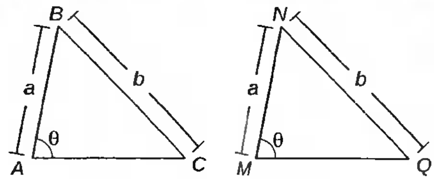
$\triangle ALC\cong\triangle CBA$ (A.L.A.)

$\rightarrow$ $AL=BC=\ell$

$\triangle AFM$: $\phi=70°+\gamma$ $\rightarrow$ $\phi>70°$

$\triangle AML$: $\phi=70°$ $\rightarrow$ $\ell>m$

Nota



Si $b>a$ $\rightarrow$ $\triangle ABC\cong\triangle MNQ$

Luego, en el problema:

$\triangle LMA\cong\triangle GME$

$\therefore$ $x=70°$

Clave **A**

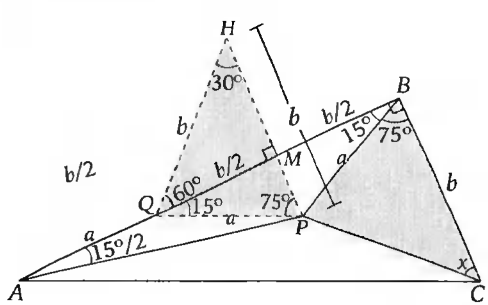
PROBLEMA N.° 31

En la región interior de un triángulo se ubica el punto P, tal que $AB=PB+BC$, $m\sphericalangle ABC=90°$ y $m\sphericalangle PBA=2(m\sphericalangle PAB)$. Calcule $m\sphericalangle PCB$.

A) 37°
B) 22° 30'
C) 15° 30'
D) 30°
E) 45°

Resolución

Piden $m\sphericalangle PCB=x$.



Datos:

$AB=PB+BC$, $m\sphericalangle ABC=90°$

$m\sphericalangle PBA=2(m\sphericalangle PAB)=15°$

Sea $PB=a$ y $BC=b$ $\rightarrow$ $AB=a+b$

Se traza PQ, de manera que $m\sphericalangle PQB=15°$

$\rightarrow$ $PB=PQ=QA=a$

Luego trazamos $\overline{PH} \perp \overline{QB}$, tal que

$m\sphericalangle QHP=30°$

⊾ QMH: notable de 30° y 60°

$\rightarrow$ $HQ=2(QM)$; $HQ=b$

$\triangle HQP \cong \triangle CBP$ (L. A. L)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PCB=m\sphericalangle QHP$

$\therefore$ $x=30°$

Clave **D**

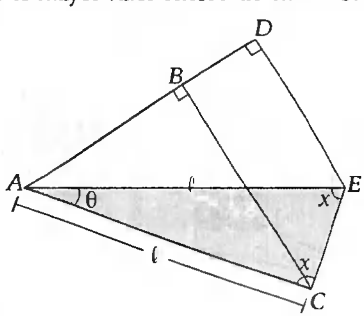
PROBLEMA N.° 32

Dado un triángulo rectángulo ADE, recto en D, se ubica el punto C en la región exterior relativa a $\overline{AE}$, luego se traza $\overline{CB}$ perpendicular a DA ($B \in \overline{DA}$), tal que ABC y ADE son triángulos congruentes. Calcule el mayor valor entero de $m\sphericalangle AEC$.

A) 88° B) 89° C) 90°
D) 91° E) 92°

Resolución

Piden el mayor valor entero de $m\sphericalangle AEC$.



Por dato, los triángulos ABC y ADE son congruentes.

$m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ADE=90°$

$\rightarrow$ $AC=AE=\ell$

En el $\triangle AEC$

$2x+\theta=180°$

$2x < 180°$

$x < 90°$

Por lo tanto, el mayor valor entero de $m\sphericalangle AEC$ será 89°.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto E, de modo que

$AB=CE$, $m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle EAC$ y

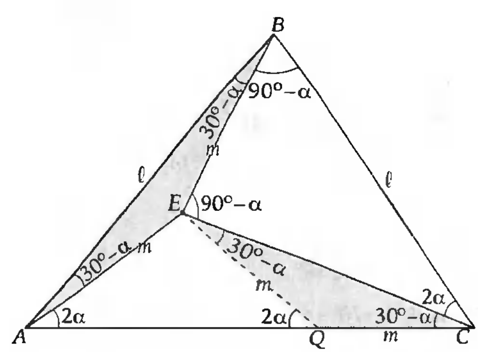
$m\sphericalangle BAE=m\sphericalangle ECA= 30°-\dfrac{m\sphericalangle BCE}{2}$

Calcule $m\sphericalangle EAC$.

A) 15° B) 30° C) 5°
D) 37° E) 53°

Resolución

Piden $m\sphericalangle EAC=2\alpha$.



Datos:

$AB=CE$, $m\sphericalangle BCE=m\sphericalangle EAC$ y

$m\sphericalangle BAE=m\sphericalangle ECA=30^\circ-\dfrac{m\measuredangle BCE}{2}$

$m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BCA=30^\circ+\alpha$

$\rightarrow\ AB=BC=\ell$

En el $\triangle EBC$

$EC=BC=\ell\ \rightarrow\ m\sphericalangle EBC=90^\circ-\alpha$ y

$m\sphericalangle ABE=30^\circ-\alpha$

Luego, $EA=EB=m$

Se traza $\overline{EQ}$, de manera que $m\sphericalangle QEC=30^\circ-\alpha$

$\triangle EQC\cong\triangle AEB$ (A. L. A.)

$\rightarrow\ QC=EQ=m$

$AE=EQ$

$\rightarrow\ m\sphericalangle EQA=2\alpha$

Por teorema del ángulo exterior, en el $\triangle EQC$:

$2\alpha=(30^\circ-\alpha)+(30^\circ-\alpha)$

$4\alpha=60^\circ$

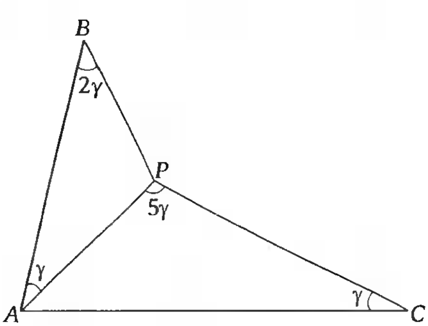
$\alpha=15$

$\therefore\ m\sphericalangle EAC=30^\circ$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

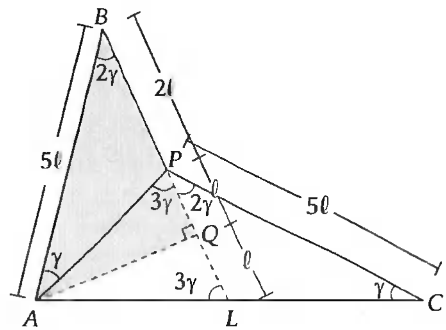
Del gráfico, $2(AB)=2(PC)=5(BP)$. Calcule γ.



A) 28° 30' B) 25° 30' C) 18° 30'
D) 22° 30' E) 26° 30'

Resolución

Piden γ.



Dato:

$2(AB)=2(PC)=5(BP)$

Sea

$BP=2\ell$

$\rightarrow\ AB=PC=5\ell$

Se prolonga $\overline{BP}$ hasta L

$\rightarrow\ m\sphericalangle APL=3\gamma$ y $m\sphericalangle LPC=2\gamma$

$\triangle PLC\cong\triangle BPA$ (A. L. A.)

$\rightarrow\ PL=PB=2\ell$

Se traza

$\overline{AQ}\perp\overline{PL}$

$m\sphericalangle APL=m\sphericalangle ALP=3\gamma$

$\rightarrow\ PQ=QL=\ell$

⊿ AQB: $5(BQ)=3(AB)$

⊿ AQB: notable de 37° y 53°

$\rightarrow\ 2\gamma=53^\circ$

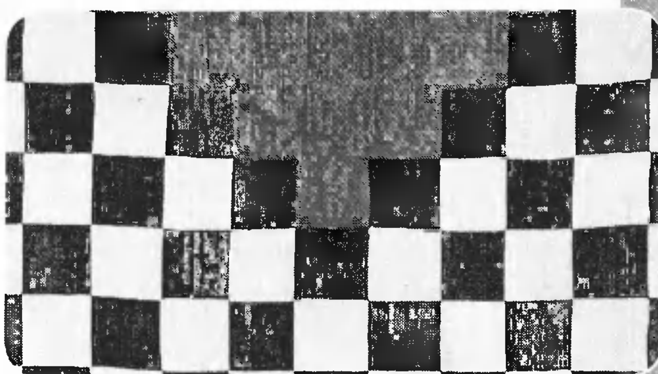
$\therefore\ \gamma=26^\circ\ 30'$

Clave **E**

Capítulo

6

Cuadriláteros



Muchos objetos de nuestro entorno nos sugieren la idea de cuadrilátero, por ejemplo la hoja de un libro, la superficie de la pizarra, etc. A diferencia del triángulo, un cuadrilátero no siempre limita una región convexa, y a pesar de no variar las longitudes de sus lados, sus medidas angulares pueden variar. Por ello su clasificación obedece al paralelismo de sus lados opuestos.

En el presente capítulo se dará solución a problemas que hacen uso de las propiedades del trapezoide, trapecio y paralelogramo y los elementos de cada uno de estos últimos.

Capítulo 6

Cuadriláteros

PROBLEMA N.° 1

En un trapezoide $ABCD$, $4(AB)=3(BC)$, $AD=5/3(AB)+CD$ y $m\measuredangle BAD=53°$. Calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 127° B) 120° C) 115°
D) 143° E) 137°

Resolución

Tenemos

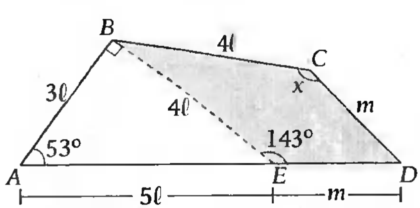
$$\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4};$$

$$AD=\frac{5}{3}(AB)+CD;$$

$$m\measuredangle BAD=53°$$

Si $AB=3\ell \rightarrow BC=4\ell$

$\therefore AD=5\ell+CD$



Trazamos $\overline{BE}$, tal que $m\measuredangle ABE=90°$

$\rightarrow BE=4\ell$ y $AE=5\ell$

Si $CD=m \rightarrow AD=5\ell+m$

$\therefore ED=CD=m$

Además, ⏢$BCDE$: trapezoide simétrico

$\rightarrow m\measuredangle BCD=m\measuredangle BED$

Por lo tanto, la $m\measuredangle BCD$ es 143°.

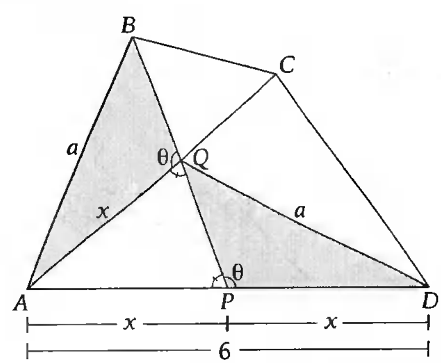
Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

En un trapezoide $ABCD$ se ubican los puntos P y Q en $\overline{AD}$ y $\overline{BP}$, respectivamente. Si ($Q\in\overline{AC}$), tal que los triángulos ABQ y QPD son congruentes, calcule AQ. Considere que $m\measuredangle AQB=m\measuredangle QPD>120°$ y $AD=6$ cm.

A) 4 cm B) 3 cm C) 5 cm
D) 7 cm E) 2 cm

Resolución



$\triangle AQB\cong\triangle QPD \rightarrow AB=QD=a$

Del gráfico

$m\sphericalangle AQP = m\sphericalangle APQ \rightarrow AP = AQ = x$

Si $AQ = x$, uno de los lados del $\triangle PQD$ debe tener longitud x, pero si $PQ = x$, entonces el $\triangle AQP$ sería equilátero, teniendo como resultado:

$\theta = 120°$

pero, por dato:

$\theta > 120°$

Entonces, el único lado que puede ser x sería PD.

Luego, $2x = 6$

$\therefore\ x = 3$

Clave **B**

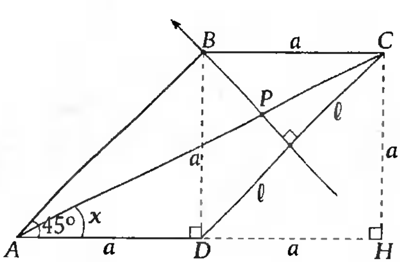
PROBLEMA N.° 3

En un romboide $ABCD$, $m\sphericalangle BAC = 45°$. Si luego se traza la mediatriz de $\overline{CD}$ que interseca a $\overline{AC}$ en P y contiene al vértice B, calcule la $m\sphericalangle CAD$.

A) $15°$ B) $37°$ C) $\frac{37°}{2}$

D) $\frac{53°}{2}$ E) $53°$

Resolución



B pertenece a la mediatriz de $\overline{DC}$

$\rightarrow BD = BC = a$

Como la $m\sphericalangle BAD = 45°$

$\rightarrow m\sphericalangle ADB = 90°$

Trazamos $CH \perp AD$

$\rightarrow DH = BC = a$ y $CH = BD = a$

⊿ACH: notable de $53°/2$

$\therefore\ x = \frac{53°}{2}$

Clave **D**

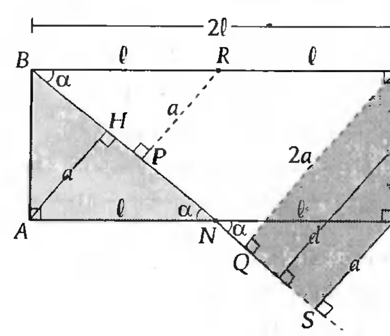
PROBLEMA N.° 4

En el rectángulo $ABCD$ se ubican los puntos medios N y M de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. Si después se traza la altura AH en el triángulo BAN, cuya longitud es a, calcule la distancia de M a $\overleftrightarrow{BN}$.

A) $2a$ B) $1{,}5a$ C) $\frac{2a}{3}$

D) $2{,}5a$ E) $3a$

Resolución



⊿$AHN \cong$ ⊿$DSN \rightarrow DS = AH = a$

Trazamos

$\overline{RP} \perp \overleftrightarrow{BN}$

$\triangle BRP \cong \triangle NDS$

$\rightarrow\ RP=a$

Luego, en el $\triangle BCQ$: (teorema de los puntos medios)

$CQ=2(RP)=2a$

En el trapecio $QCDS$

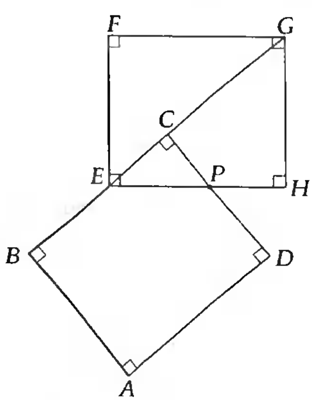
$$d=\frac{2a+a}{2}=\frac{3a}{2}=1{,}5a$$

$\therefore\ d=1{,}5a$

Clave B

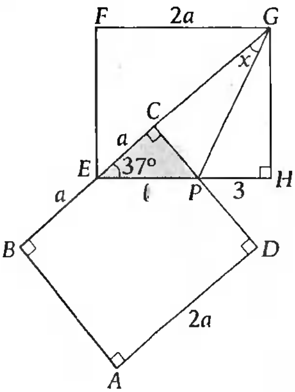
PROBLEMA N.° 5

En el gráfico, $ABCD$ y $EFGH$ son congruentes. Si $EB=EC$; $HP=3$ y EP toma su mínimo valor entero impar, calcule m$\sphericalangle CGP$.



A) 18°30'
B) 26°30'
C) 37°
D) 30°
E) 16°

Resolución



ℓ (N.° ent. impar): $2a=\ell+3\ \rightarrow\ a=\dfrac{\ell+3}{2}$

$\ell>a\ \rightarrow\ \ell>\dfrac{\ell+3}{2}$

$\ell>3\ \rightarrow\ \ell=4;\ 5;\ 6;\ \ldots$

ℓ (N.° ent. impar)$=5\ \rightarrow\ a=\dfrac{5+3}{2}=4$

m$\sphericalangle GEH=37°\ \rightarrow\ CP=3$

m$\sphericalangle PGH=$m$\sphericalangle PGC=x\ \rightarrow\ 2x=53°$

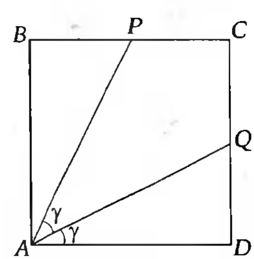
$$\therefore\ x=\frac{53°}{2}=26°\,30'$$

Clave B

PROBLEMA N.° 6

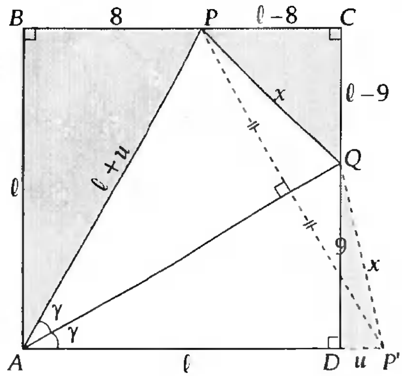
Según el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Si $BP=8$ cm y $QD=9$ cm, calcule PQ.

A) 8 cm
B) 9 cm
C) 10 cm
D) $\sqrt{85}$ cm
E) $\sqrt{95}$ cm



Resolución

Reemplazamos los datos, en el gráfico tenemos:



Trazamos $\overline{PP'} \perp \overline{AQ}$

$\rightarrow$ $AP=AP'=\ell+u$ y $QP'=QP=x$

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$x^2=81+u^2$

$x^2=(\ell-8)^2+(\ell-9)^2$

$(\ell+u)^2=8^2+\ell^2$

Resolviendo las 3 ecuaciones obtenemos: $\ell=15$; $u=2$

$\therefore\ \ x=\sqrt{85}$

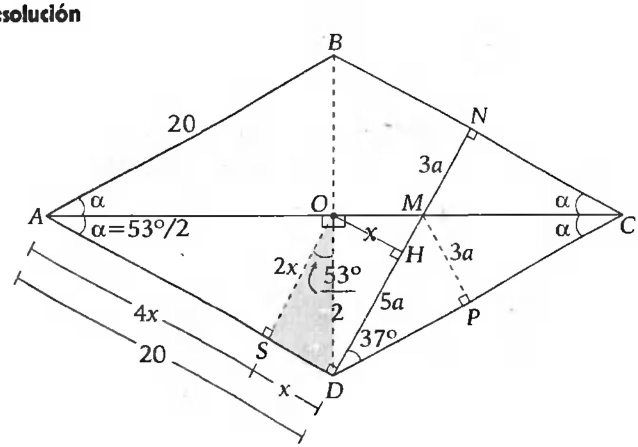
Clave **D**

PROBLEMA N.° 7

En un rombo $ABCD$, $AB=20$, se ubica el punto N en $\overline{BC}$, de modo que $\overline{DN}$ interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en M. Si $5(MN)=3(DM)$ y $m\measuredangle NDA=90°$, calcule la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a $\overline{DN}$.

A) 3 B) 5 C) 4 D) 2,5 E) 1

Resolución



Del dato:

$$\frac{DM}{MN}=\frac{5}{3}$$

Por lo tanto, si $DM=5a$

$\rightarrow$ $MN=3a$

Pero $MP=MN=3a$

$\rightarrow$ en el ⊿ DMP

$m\measuredangle MDP=37°$

Luego $\alpha=\dfrac{53°}{2}$

Piden $OH=x \rightarrow SD=x$

Pero en el $\triangle SOD$, notable de $53°/2$, $OS=2x$

También en el $\triangle AOS$, notable de $53°/2$, $AS=4x \rightarrow AD=AB=20=5x$

$\therefore x=4$

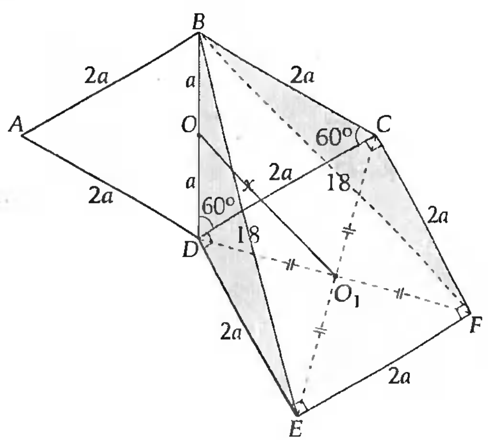
Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

En un rombo $ABCD$ se traza exteriormente el cuadrado $CDEF$, de modo que $BD=EF$ y $BE=18$. Calcule la distancia del centro del cuadrado al punto medio de $\overline{BD}$.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Resolución



Si

$BD=EF \rightarrow BD=DC=BC$

Por lo tanto, el $\triangle BDC$ es equilátero

$\rightarrow m\sphericalangle BDC=m\sphericalangle BCD=60°$

Luego, el $\triangle BCF \cong \triangle BDE$

$\rightarrow BF=BE=18$

Nos piden $OO_1=x$

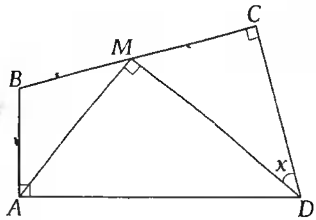
Por lo tanto, en el $\triangle DBF$ (del teorema de los puntos medios)

$$x=\frac{18}{2}=9$$

Clave **C**

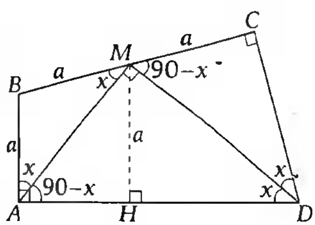
PROBLEMA N.° 9

En el siguiente gráfico, $AB=BM=MC$. Calcule x.



A) 15°   B) 30°   C) 22° 30'
D) 45°   E) 36°

Resolución



Sea $AB=BM=MC=a$

En ⊿DCM

$m\measuredangle CMD=90°-x$

$\rightarrow$ en M: $m\measuredangle BMA=x$

Pero en el $\triangle ABM$

$m\measuredangle BAM=m\measuredangle BMA=x$

$m\measuredangle MAD=90°-x$

$\rightarrow$ $m\measuredangle ADM=x$

Como $\overline{DM}$ es bisectriz, trazamos $\overline{MH}\perp\overline{AD}$

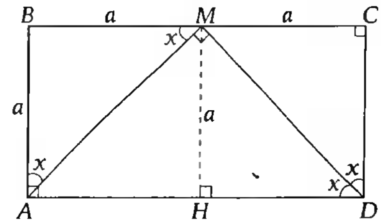
$\rightarrow$ $MH=MC=a$

Si

$MH=BA=a$ y $\overline{MH}\perp\overline{AD}$; $\overline{BA}\perp\overline{AD}$

$\rightarrow$ $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{AD}$

Luego, graficando correctamente, tenemos



$\rightarrow$ $HD=MC=a$

$\therefore$ $x=45°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

En un cuadrilátero $ABCD$, $AB=BC=CD$. Si en BD se ubica el punto medio M, tal que $AM=5$, $BM=4$ y $m\measuredangle ABC=90°$, calcule AD.

A) $\sqrt{59}$ B) $\sqrt{61}$ C) $\sqrt{65}$
D) $\sqrt{56}$ E) $\sqrt{73}$

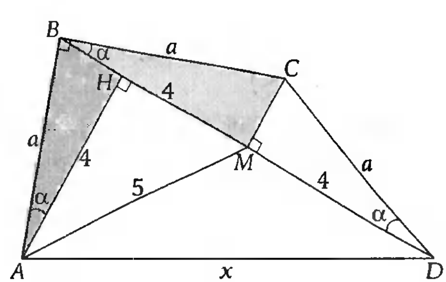
Resolución

Si M es punto medio

$\rightarrow$ $MD=BM=4$

Pero, en el $\triangle BCD$ (isósceles)

$m\measuredangle CMB=90°$



Luego

$\triangle ABH \cong \triangle BCM$ (A. L. A.)

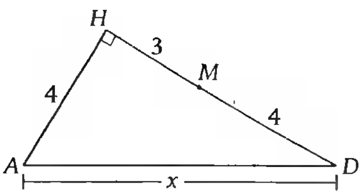
$\rightarrow \ AH=BM=4$

Por lo tanto, el $\triangle AHM$ es notable de 37° y 53°

$\rightarrow \ HM=3$

Finalmente tenemos

$HD=HM+MD=7$



Aplicando el teorema de Pitágoras

$x^2=4^2+7^2=65$

$\therefore \ x=\sqrt{65}$

Clave **C**

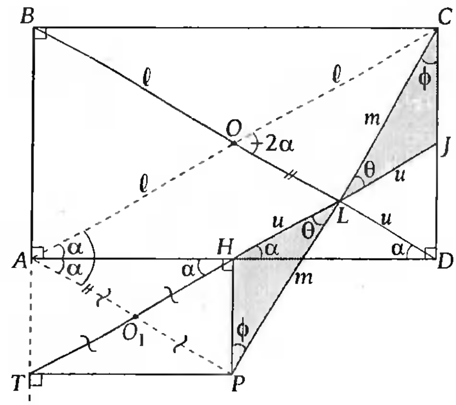
PROBLEMA N.° 11

En un rectángulo *ABCD* se ubica el punto *L* en *BD* y se prolonga *CL* hasta *P*, tal que *CL*=*LP*. Si luego se trazan las perpendiculares *PH* y *PT* a los lados *AD* y *BA*, respectivamente, (*H* en *AD* y *T* en $\overleftrightarrow{AB}$), calcule m∢*CLH*+m∢*PLT*.

A) 90°
B) 150°
C) 180°
D) 160°
E) 135°

Resolución

Piden calcular m∢*CLH*+m∢*PLT*; además, *T* debe estar en la prolongación de $\overline{BA}$.



Prolongamos $\overline{HL}$ hasta *J*

Como $\triangle PHL \cong \triangle CJL$

$\rightarrow \ HL=LJ=u$

En el $\triangle HDJ$

$DL=HL=LJ=u$

m∢LHD=m∢$LDH=\alpha$

También

m∢OAD=m∢$ODA=\alpha$

$\rightarrow$ m∢$COD=2\alpha$

En el $\triangle ACP$

$\overline{AP} // \overline{OL}$

$\rightarrow$ m∢$CAP=2\alpha$

Por lo tanto

m∢$HAP=\alpha$

Luego, en $\square ATPH$

m∢O_1HA=m∢$O_1AH=\alpha$

$\rightarrow \ \overline{TH}$ y $\overline{HJ}$ son colineales

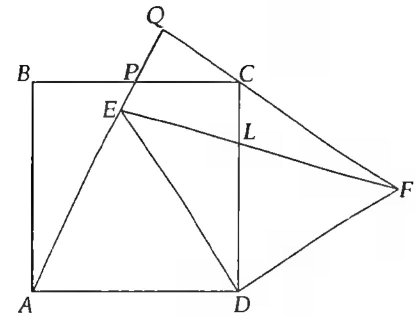
$\therefore$ m∢CLH+m∢PLT=180°

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

Según el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Si AED y CDF son triángulos equiláteros, calcule LD. Considere $PQ=a$.

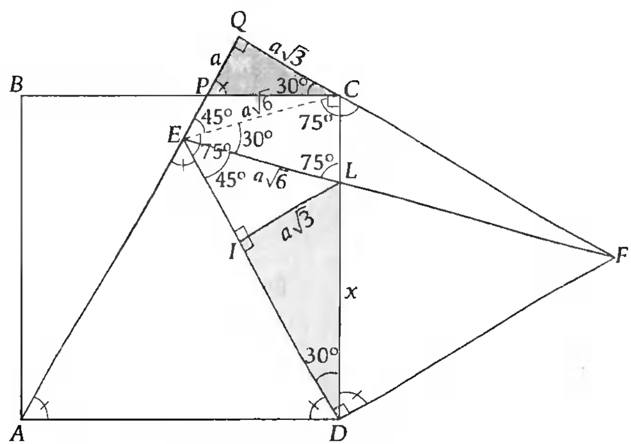
A) $2a\sqrt{3}$
B) $a\sqrt{3}$
C) $3a$
D) $3a/2$
E) $4a\sqrt{3}$



Resolución

Sea

$LD=x$, $DE=DC$ y $m\sphericalangle EDC=30°$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle DEC=m\sphericalangle DCE=75°$



Del gráfico

Como

$m\sphericalangle BCQ=30°$ y $m\sphericalangle QPC=60°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PQC=90°$

$\therefore$ $QC=a\sqrt{3}$

En E: $m\sphericalangle QEC=45°$

$\rightarrow$ $EC=(a\sqrt{3})\sqrt{2}=a\sqrt{6}$

Pero $ED=DF$ y $m\sphericalangle EDF=90°$

$m\sphericalangle DEF=45°$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle LEC=30°$

Luego $m\sphericalangle ELC=75°$ $\rightarrow$ $EL=EC=a\sqrt{6}$

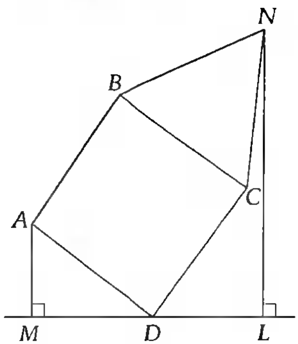
Trazamos $\overline{LH}\perp\overline{ED}$ $\rightarrow$ $LH=a\sqrt{3}$

En el ⊿LHD: notable de 30° y 60°

$\therefore$ $x=2(a\sqrt{3})$

PROBLEMA N.° 13

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Si $BN=NC$; $m\measuredangle BNC=53°$ y $AM+4(MD)=a$, calcule NL.



A) a B) $a/3$ C) $a/2$
D) $a/5$ E) $2a/5$

Resolución

Trazamos $\overline{NP}\perp\overline{BC}$

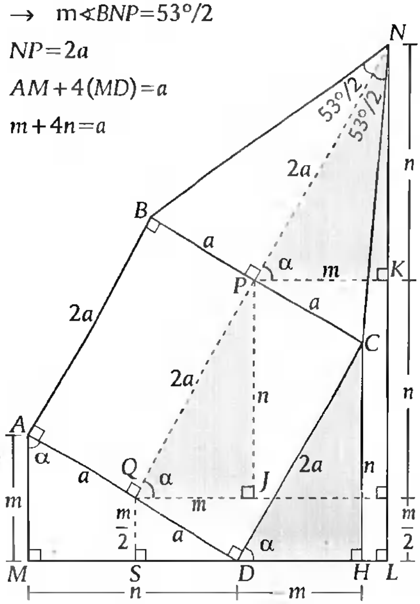
$BP=PC=a$

$\rightarrow$ $m\measuredangle BNP=53°/2$

$NP=2a$

$AM+4(MD)=a$

$m+4n=a$



Si prolongamos $\overline{NP}$ hasta Q

$\rightarrow$ $PQ=AB=CD=2a$

Luego

$⊿QPJ\cong⊿PNK\cong⊿DCH$ (A.L.A.)

$\rightarrow$ $PJ=NK=CH=n=MD$

Además

$AM=DH=m$

$\rightarrow$ $QS=\dfrac{m}{2}$

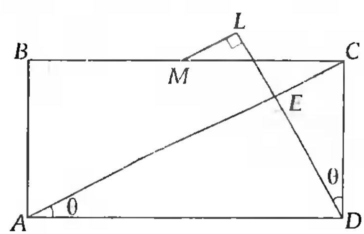
Luego

$$NL=2n+\frac{m}{2}=\frac{4n+m}{2}=\frac{a}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, $ABCD$ es un rectángulo, si $AE=3(EC)=12$ y $MB=MC$, calcule ML.



A) 2 B) 3 C) 6
D) 5 E) 7

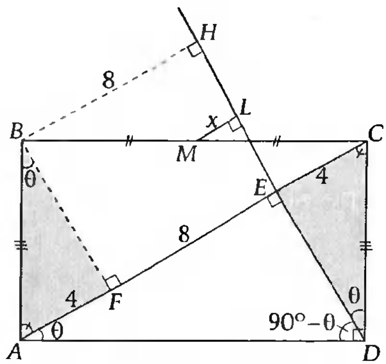
Resolución

Tenemos:

$AE=12$

$EC=4$

$m\measuredangle AED=90°$



Trazamos $\overline{BF} \perp \overline{AC}$

$\rightarrow \triangle ABF \cong \triangle CDE$ (A.L.A.)

Además $AF=4$

donde $FE=8$

Trazamos

$\overline{BH} \perp \overleftrightarrow{DL} \rightarrow BH=FE=8$

Luego, en el trapecio $BHCE$ $x=\dfrac{8-4}{2}=2$

$\therefore\ x=2$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

En un romboide $ABCD$ se ubica el punto medio M en $\overline{CD}$, luego se trazan $\overline{AH} \perp \overline{BM}$ ($H \in BM$) y $\overline{HF} \perp \overline{AD}$, ($F \in \overline{AD}$) tal que $BC=2(HF)$. Calcule el menor valor entero de la m$\sphericalangle BCD$.

A) 75° B) 76° C) 77° D) 78° E) 79°

Resolución

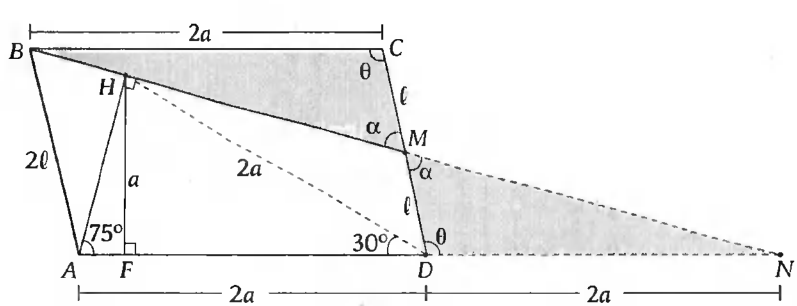
Tenemos

$BC=2(HF)$

Si

$HF=a \rightarrow BC=2a=AD$

Prolongamos $\overline{BM}$ hasta N (N en la prolongación de $\overline{AD}$)



$\triangle DMN \cong \triangle CMB$ (A. L. A.)

$\rightarrow DN = BC = 2a$

En el ⊿AHN: HD: mediana

$$\rightarrow HD = \frac{AN}{2} = 2a$$

Donde

⊿FHD: notable de 30° y 60°

$\rightarrow$ m∢FDH=30°

Luego, en el $\triangle ADH$

m∢HAD=75°=m∢AHD

Como

m∢BAD=m∢BCD=θ

$\rightarrow \theta > 75°$

$\therefore\ \theta_{\text{mín. entero}} = 76°$

Clave **B**

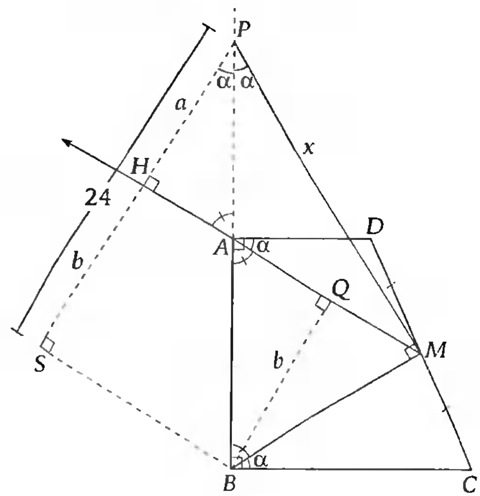
PROBLEMA N.° 16

En un trapecio rectángulo $ABCD$, donde $\overline{AB}$ es la altura, se ubica el punto medio M de CD. Si posteriormente se prolonga $\overline{BA}$ hasta el punto P, tal que las distancias de P y B a $\overline{MA}$ suman 24 cm, calcule MP. Considere que m∢BPM=m∢MAD.

A) 24 cm
B) 12 cm
C) 18 cm
D) 20 cm
E) 26 cm

Resolución

Sea m∢BPM=m∢MAD=α



Tenemos

$a+b=24$

Prolongamos $\overline{PH}$ y trazamos $\overline{BS} \perp \overline{PH}$

En el ⏢$ADCB$

m∢MBC=m∢MAD=α

$\rightarrow$ m∢ABM=90−α

Luego, en $\triangle PMB$

m∢PMB=90°

Como

m∢PAH=m∢MAB=90°−α

$\rightarrow$ m∢HPA=α

Luego

$PM=PS=a+b$

$\therefore\ x=24$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

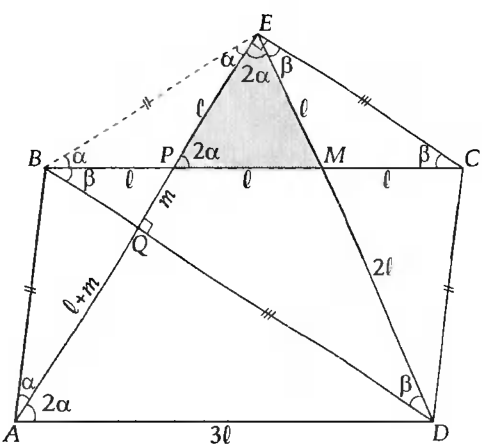
En la región exterior, y relativo a BC de un paralelogramo $ABCD$, se ubica el punto E, de modo que m$\sphericalangle AEC=90°$; m$\sphericalangle EAD=2$(m$\sphericalangle BAE$); $\overline{BC}\cap\overline{AE}=\{P\}$, $\overline{BC}\cap\overline{ED}=\{M\}$; $BP=PM=MC$ y $MD=2(EM)$. Calcule la m$\sphericalangle BAE$.

A) 80°
B) 50°
C) 40°
D) 30°
E) 28°

Resolución

Tenemos

$MD=2(EM)$



En el ⊿PEC

$$EM=\frac{PC}{2}=\ell$$

$\rightarrow$ $MD=2(EM)=2\ell$

Como $AD=BC=3\ell=ED$

$\rightarrow$ el $\triangle ADE$ es isósceles

Luego

m$\sphericalangle EAD=$m$\sphericalangle AED=2\alpha$

También

m$\sphericalangle EPC=2\alpha$

Además

m$\sphericalangle MEC=$m$\sphericalangle MCE=$m$\sphericalangle MBD=$m$\sphericalangle MDB=\beta$

$\overline{BD}//\overline{EC}$

$\overline{BD}\perp\overline{AE}$

$\rightarrow$ $\overline{EQ}=\overline{QA}$

$BE=BA$

m$\sphericalangle BEA=$m$\sphericalangle BAE=\alpha$

En el $\triangle BEP$

m$\sphericalangle PBE=\alpha$

$\rightarrow$ $PE=BP=\ell$

Luego, en el $\triangle PEM$ (equilátero)

$2\alpha=60°$

$\therefore$ $\alpha=30°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

En el cuadrado $ABCD$ se ubican los puntos M, N y P en $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y en la región interior, respectivamente. Si $MNDP$ es un rombo, $BL=3(LC)$ y $\overleftrightarrow{NP}\cap\overline{BC}=\{L\}$, calcule $\dfrac{MB}{LC}$.

A) $2\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $\dfrac{3}{2}$

D) $\sqrt{7}$

E) $\dfrac{4}{3}$

Resolución

Tenemos

$BL=3(LC)$

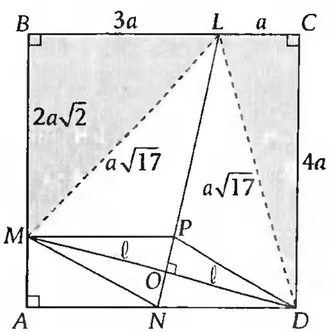
Si

$LC=a$

$BL=3a$

$CD=4a$

$\rightarrow\ LD=a\sqrt{17}$



Pero en el rombo $MNDP$

$\overline{NP}$ es mediatriz de $\overline{MD}$

$\rightarrow\ LM=LD=a\sqrt{17}$

Luego, en el ⊾MBL

$(MB)^2=\left(a\sqrt{17}\right)^2-(3a)^2=8a^2$

Donde

$MB=2a\sqrt{2}$

$\rightarrow\ \dfrac{MB}{LC}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{a}$

$\therefore\ \dfrac{MB}{LC}=2\sqrt{2}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

En el cuadrilátero $ABCD$, m∢$ADC=90°$, m∢$BAC=30°$, $BC=CD$ y m∢$ACD=3$(m∢BCA). Calcule m∢BCA.

A) 12°
B) 14°
C) 15°
D) 16°
E) 18°

Resolución

Trazamos

$\overline{BP}\perp\overline{AC}$

Tal que $BM=MP=m$

$\rightarrow\ CP=CB=a$

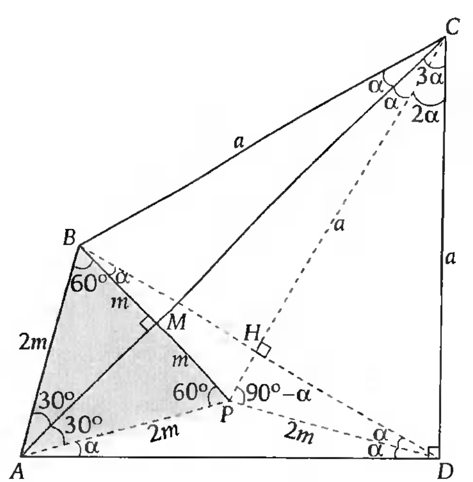
m∢PCA=m∢$BCA=\alpha$

m∢$PCD=2\alpha$=m∢PCB

También

$AB=AP=2m$

($\triangle ABP$: equilátero)



Como $CD=BC=a$

$\rightarrow PD=PB=2m$

$\overline{CP} \perp \overline{BD}$

En $\triangle PCD$ y $\triangle PCB$: $m\sphericalangle PDB=m\sphericalangle PBD=\alpha$

También

$m\sphericalangle PDC=90^\circ-\alpha$

$\rightarrow m\sphericalangle PDA=\alpha$

Luego en $\measuredangle BDAP$: $4\alpha=60^\circ$

$\rightarrow \alpha=15^\circ$

$\therefore m\sphericalangle BCA=\alpha=15^\circ$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

En un cuadrilátero $ABCD$, $AC=BD$; $m\sphericalangle CBD=38^\circ$; $m\sphericalangle BCA=22^\circ$ y $m\sphericalangle BDC=30^\circ$. Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 20°
B) 22°
C) 26°
D) 28°
E) 30°

Resolución

En el $\triangle BCD$: $m\sphericalangle BCD=112^\circ$

$\rightarrow m\sphericalangle ACD=90^\circ$

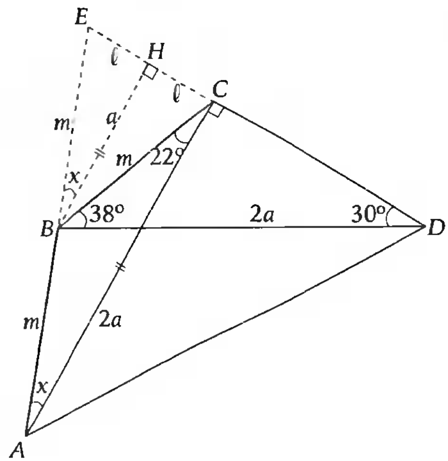
Trazamos $\overline{BH} \perp \overleftrightarrow{DC}$

En el ⊿BHD: notable de 30° y 60°

$$BH=\frac{BD}{2}=a$$

$\rightarrow BD=2a=AC$

Como $\overline{AC}//\overline{BH}$ y $BH=\dfrac{AC}{2}$



Entonces al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{CH}$ hasta E, B es punto medio de $\overline{AE}$ y H es punto medio de $\overline{EC}$.

Luego, en el ⊿ACE

$\overline{BC}$: mediana

$\rightarrow BC=AB=BE=m$

Por lo tanto, la $m\sphericalangle BAC$ es 22°.

Clave **B**

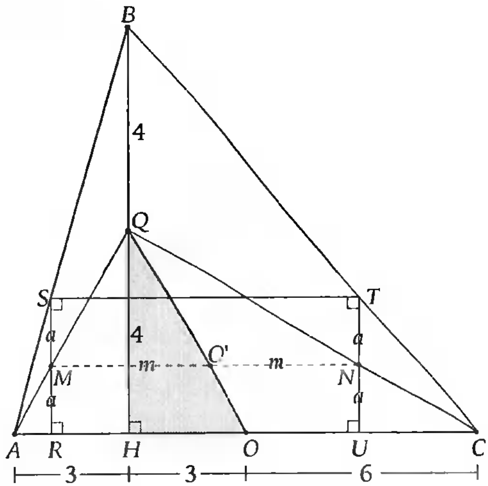
PROBLEMA N.° 21

En un triángulo ABC se traza $\overline{BH}$, que es altura (H en $\overline{AC}$), donde su longitud es 8 cm, tal que $3(AH)=HC=9$ cm. Calcule la longitud del lugar geométrico de los centros de los rectángulos inscritos en el triángulo ABC, tal que un lado se encuentra contenido en $\overline{AC}$.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Resolución

En el gráfico



Consideremos los casos extremos, de los rectángulos $RSTU$ inscritos en ABC.

- En el supuesto que RS sea mínimo ($RS=0$), entonces S y R coinciden con A; T y U coinciden con C. El centro del rectángulo sería O, el punto medio de $\overline{AC}$.
- En el supuesto caso que RS sea máximo ($RS=BH$), entonces S y T coinciden con B; R y U coinciden con H. Luego, el centro del rectángulo sería Q, el punto medio de $\overline{BH}$.

Si se demuestra que cualquier otro centro de $RSTU$ está contenido en $\overline{QO}$, el lugar geométrico de todos los centros de $RSTU$ sería $\overline{QO}$.

En el $\triangle ABH$

$\overline{SR}//\overline{BH}$ $\rightarrow$ si $\overline{AQ}$ es mediana

En el $\triangle ASR$

$\overline{AM}$ será mediana si $\overline{AQ} \cap \overline{SR}=M$

$\therefore$ M es punto medio de $\overline{SR}$

Análogamente,

en el $\triangle CBH$: $\overline{CQ} \cap \overline{TU}=N$

$\therefore$ N es punto medio de $\overline{TU}$

Como

$\overline{MN}//\overline{RU}$ $\rightarrow$ $\overline{MN}//\overline{AC}$

Si

$\overline{QO}$ es mediana en el $\triangle AQC$

$\rightarrow$ $\overline{QO'}$ será mediana en el $\triangle MQN$

$\therefore$ $MO'=O'N$

Eso quiere decir que O' es centro del rectángulo $RSTU$.

Entonces $\overline{QO}$ es el lugar geométrico de todos los centros, de los rectángulos inscritos en ABC con un lado contenido en $\overline{AC}$.

Ahora, la longitud de $\overline{QO}$ la calculamos en el $\triangle QHO$

$$(QO)^2=4^2+3^2=25$$

$\therefore$ $QO=5$

Clave **C**

Capítulo

7

Polígonos

Las antiguas culturas peruanas ya manejaban las propiedades de los polígonos, pues antes de ensamblar perfectamente sus muros con inmensas piezas rocosas, tenían que graficar las características angulares de la piedra para que encajara una después de otra y construir inmensas fortalezas; un ejemplo de ello es la piedra de los doce ángulos.

El estudio del polígono permite analizar y relacionar los diversos elementos que presenta, como el número de diagonales, la medida de sus ángulos o calcular el número de diagonales medias. Además, podemos demostrar algunos de sus teoremas mediante el uso de combinatorias.

En este capítulo encontramos problemas de la clasificación de los polígonos y sus propiedades, así como también del cálculo de diagonales que se pueden trazar o de las medidas angulares que forman sus lados o algunos de sus elementos.

Polígonos

PROBLEMA N.° 1

Dado un polígono convexo de n lados, donde n es par, calcule el número de diagonales trazadas desde los vértices impares.

A) n^2-2n-2

B) n^2-3n-3

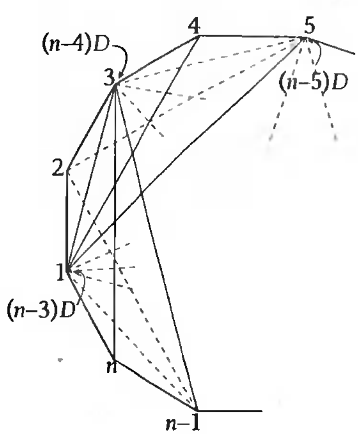
C) $\frac{n}{4}(3n-11)$

D) $\frac{n}{8}(3n-10)$

E) $\frac{n}{4}(2n-7)$

Resolución

Sabemos que n es par.



$$\frac{n}{2}\text{ veces}\begin{cases} V_1 : n-3 \\ V_3 : n-4 \\ V_5 : n-5 \\ \vdots \\ V_{(n-1)} : n-\left(\frac{n}{2}+2\right) \end{cases}$$

$$\sum \#D=\frac{n}{2}\cdot n-\left(3+4+5+\ldots+\left(\frac{n}{2}+2\right)\right)$$

$$\sum \#D=\frac{n^2}{2}-\left(\frac{\left(\frac{n}{2}+2\right)\left(\frac{n}{2}+3\right)}{2}-3\right)$$

$$\sum \#D=\frac{n^2}{2}-\left(\frac{n^2}{8}+\frac{5n}{4}+3-3\right)$$

$$\sum \#D=\frac{n^2}{2}-\left(\frac{n^2}{8}+\frac{5n}{4}\right)$$

$$\sum \#D=\frac{3n^2}{8}-\frac{10n}{8}$$

$$\therefore\ \sum \#D=\frac{n}{8}(3n-10)$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Los ángulos interior y exterior de un polígono regular miden θ y $K\theta$, respectivamente. Si K toma su menor valor entero, calcule el número de diagonales medias del polígono.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

Resolución

En un polígono regular, la medida de un ángulo interior y exterior se calcula mediante las fórmulas siguientes.

$$i=\frac{180^\circ(n-2)}{n}=\theta$$

$$e=\frac{360^\circ}{n}=K\theta$$

$$\rightarrow\ \frac{360^\circ}{n}=K\left(\frac{180^\circ(n-2)}{n}\right)$$

Entonces

$$2=K(n-2)$$

$$(n-2)=\frac{2}{K}$$

Pero

$n>2$ y además es entero

$$n-2>0$$

$$\rightarrow\ \frac{2}{K}>0$$

Si

$$n=3\ \rightarrow\ K=2$$

$$n=4\ \rightarrow\ K=1$$

$$n=5\ \rightarrow\ K=\frac{2}{3}$$

$$n=6\ \rightarrow\ K=\frac{1}{2}$$

A mayor n, entonces K disminuye y se hace fracción

Entonces el $K_{\text{máx}}$ y entero es 2.

Siendo el polígono un triángulo, entonces el número de diagonales medias que se pueden trazar es

$$\text{N.}^\circ\ D_m=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3(3-1)}{2}=3$$

Pero el $K_{\text{mín}}$ y entero sería 1

$$\rightarrow\ n=4$$

$$\therefore\ \text{N.}^\circ\ D_m=\frac{4(4-1)}{2}=6$$

Clave **C**

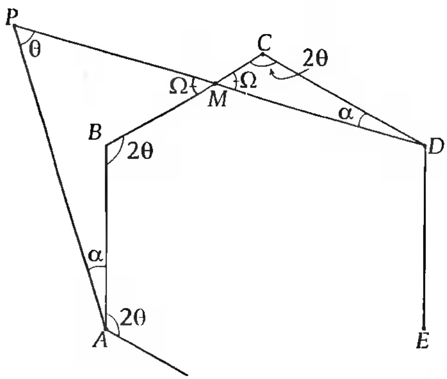
PROBLEMA N.° 3

Los puntos A, B, C, D, E, son los vértices de un polígono equiángulo. Si se ubica el punto P en la región exterior, tal que $\overline{PD}$ interseca a $\overline{BC}$, m$\measuredangle PAB$=m$\measuredangle PDC$ y m$\measuredangle ABC$=2(m$\measuredangle APD$), calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores de dicho polígono.

A) 720°
B) 180°
C) 540°
D) 360°
E) 1080°

Resolución

En el gráfico



Sea

m∢PAB=m∢$PDC=\alpha$ y

m∢ABC=2(m∢APD)=2θ

Sea M la intersección de $\overline{BC}$ con $\overline{PD}$

Luego

$\Omega+2\theta+\alpha=180°$ (I)

En el ∡$APMB$

$\alpha+\theta+\Omega=2\theta$

$\rightarrow\ \alpha+\Omega=\theta$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

$3\theta=180°$

$\theta=60°$

Luego

$$2\theta=120°=\frac{180°(n-2)}{n}$$

$\rightarrow\ n=6$

$\therefore\ \Sigma$m∢s$_{\text{int}}=180°(n-2)=720°$

Clave **A**

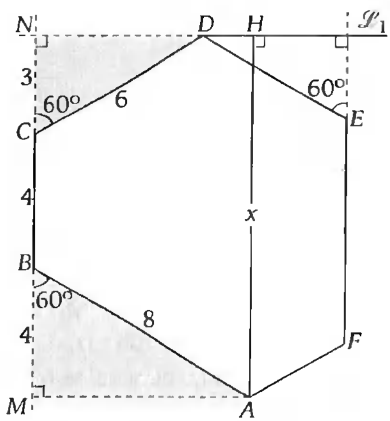
PROBLEMA N.° 4

En un polígono equiángulo $ABCDEF$, se cumple que $AB=8$, $BC=4$ y $CD=6$. Si por D se traza la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{FE}$, calcule la distancia A a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

Resolución

En el gráfico



Como el polígono es equiángulo y tiene 6 lados

$\rightarrow\ n=6$

Además

$$i=\frac{180°(n-2)}{n}=120°\ \wedge$$

$$e=\frac{360°}{n}=60°$$

$\rightarrow\ \overline{EF}//\overline{BC}$

Si

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{EF}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Trazamos

$\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Entonces los triángulos ABM y DCN son notables de 30° y 60°.

$BM=4$ y $CN=3$

Como

$\overline{AM} // \overline{DN}$

la distancia de A a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es igual a MN.

$\therefore\ x=4+4+3=11$

Clave **B**

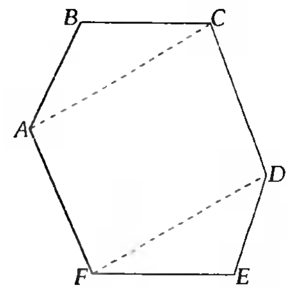
PROBLEMA N.° 5

En un hexágono convexo se trazan dos diagonales y una diagonal media, tal que no se intersequen (considere que los polígonos no tienen regiones interiores comunes). Calcule la suma del número de diagonales de dichos polígonos.

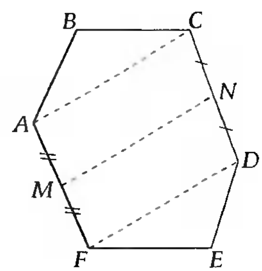
A) 0 B) 1
C) 2
D) 3 E) 4

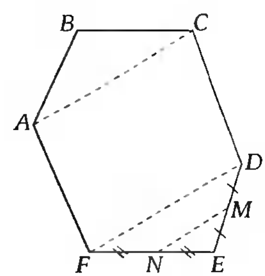
Resolución

Si dos diagonales de un polígono convexo de seis lados no se intersecan, es decir, no tienen ningún punto en común, ni siquiera en sus extremos, entonces la única posibilidad sería la siguiente.



Al trazar la diagonal media, en cualquiera de las tres posibilidades, se determinan 2 cuadriláteros y 2 triángulos.





En los cuadriláteros se pueden trazar dos diagonales. Por lo tanto, la suma del número de diagonales de los polígonos que determinan estas diagonales son $2\times 2=4$.

Clave **E**

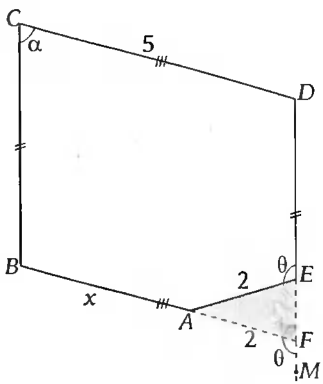
PROBLEMA N.° 6

Se tiene un pentágono $ABCDE$, tal que $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{BC}//\overline{ED}$, $AE=2$, $CD=5$ y $m\sphericalangle BCD+m\sphericalangle AED=180°$.
Calcule AB.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1,5

Resolución

Tenemos $\alpha+\theta=180°$



Prolongamos $\overline{BA}$ y $\overline{DE}$ que se intersecan en F.
Como

$$\overleftrightarrow{BAF}//\overline{CD}$$

entonces

$$m\sphericalangle BFM+m\sphericalangle BCD=180°$$

$\therefore$ $m\sphericalangle BFM=\theta$

En el $\triangle FAE$

$$AF=AE=2$$

En el paralelogramo $FBCD$

$$\underbrace{BF}_{2+x}=\underbrace{CD}_{5}$$

$\therefore$ $x=3$

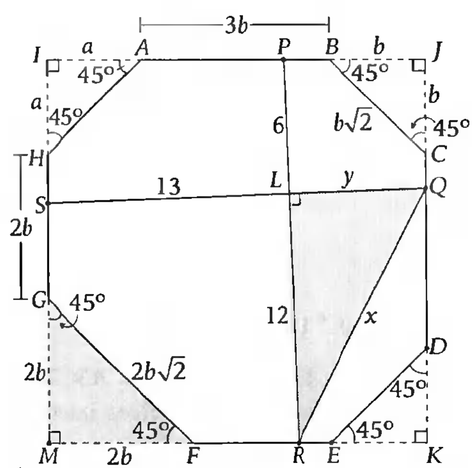
Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

En un octógono equiángulo $ABCDEFGH$, $2\sqrt{2}(AB)=6(BC)=3(FG)=3\sqrt{2}(GH)$.
Si en $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ se ubican los puntos P, Q, R y S, tal que $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ se intersecan perpendicularmente en L, calcule QR. Considere que $PL=6$, $LS=13$ y $LR=12$.

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

Resolución



Por ser un octógono equiángulo, la medida de su ángulo externo es

$$e=\frac{360}{n}=\frac{360}{8}=45°$$

Sea

$$2\sqrt{2}AB = 6BC = 3FG = 3\sqrt{2}GH = 6\sqrt{2}b$$

$\rightarrow$ $AB=3b$

$BC = b\sqrt{2}$

$FG = 2b\sqrt{2}$

$GH=2b$

Prolongamos $\overline{HG}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ formándose el rectángulo $LIJK$, pero

$MI=IJ=4b+a$

Resultando ser $MIJK$ un cuadrado.

Luego

$SQ=PR$

$13+y=6+12$

$\rightarrow$ $y=5$

Finalmente, en el $\triangle QLR$

$x^2=y^2+12^2$

$\therefore$ $x=13$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Se tiene un polígono equiángulo $ABCDEF$..., en el cual se trazan las bisectrices interiores de los vértices B y E intersecándose en P. Si $m\measuredangle BPE=180° - \dfrac{m\measuredangle BCD}{2}$, calcule el número de diagonales del polígono.

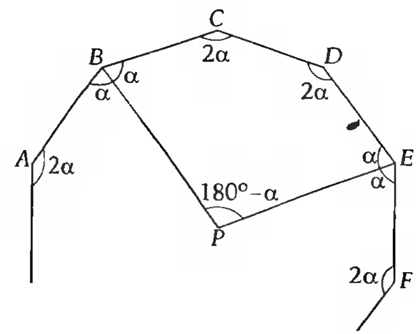
A) 20 B) 27
C) 35
D) 44 E) 54

Resolución

Sea

$$i=\frac{180°(n-2)}{n}=2\alpha$$

$\rightarrow$ $m\measuredangle BPE=180°-\alpha$



Luego, en el pentágono $PBCDE$

$180°(3)=180+5\alpha$

$\rightarrow$ $\alpha=72°$

También

$i=2\alpha=144$

$$i=\frac{180°(n-2)}{n}$$

$\rightarrow$ $n=10$

Nos piden

$$\text{N.° } D=\frac{n(n-3)}{2}$$

$$\text{N.° } D=\frac{10(10-3)}{2}$$

$\therefore$ N.° $D=35$

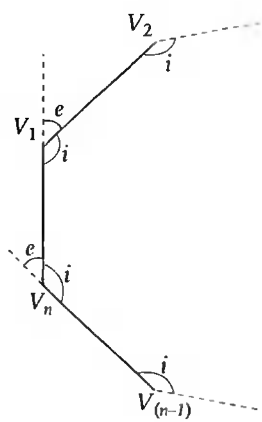
Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno mide $(q+4)$ veces la medida del ángulo exterior, y además se cumple que el número de diagonales es $36q$?

A) 22
B) 46
C) 47
D) 49
E) 24

Resolución



$$i=\frac{180°(n-2)}{n}$$

$$e=\frac{360°}{n}$$

Por dato:

$$\frac{180°(n-2)}{n}=(q+4)\frac{360°}{n}$$

$$n-2=2(q+4)$$

$$n=2q+10=2(q+5)$$

Luego

$$\text{N.° } D=\frac{n(n-3)}{2}=36q$$

$$\text{N.° } D=\frac{2(q+5)(2q+7)}{2}=36q$$

$$\rightarrow\ 2q^2+17q+35=36q$$

$$2q^2-19q+35=0$$

$$q \qquad -7$$
$$2q \qquad -5$$

$$\rightarrow\ q=7 \ \wedge\ q=5/2$$

Como $n=2q+10$, el polígono tiene 24 lados o 15 lados.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 10

En un polígono equilátero se conoce que desde 4 vértices consecutivos se pueden trazar 29 diagonales. Calcule el perímetro de la región poligonal equilátera, si uno de sus lados mide 6 cm.

A) 48 cm
B) 54 cm
C) 60 cm
D) 66 cm
E) 72 cm

Resolución

Para conocer el número de diagonales que se pueden trazar desde K vértices consecutivos, en un polígono de n lados usamos la siguiente fórmula:

$$\text{N.}^{\circ}\ D_K^n = Kn - \frac{(K+1)(K+2)}{2} = 29$$

donde $K=4$

$$4n - \frac{(5)(6)}{2} = 29 \quad \rightarrow \quad 4n=44$$

$$\therefore \quad n=11$$

Por ser un polígono equilátero, su perímetro es $n\times\ell$ siendo ℓ la longitud de un lado.

Como

$\ell=6$ cm y $n=11$

$2p=11\times6$

$\therefore$ $2p=66$ cm

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

En un polígono regular, si se triplica el número de lados, la medida de cada ángulo interior aumenta en 24°. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

A) 20 B) 65 C) 44
D) 27 E) 35

Resolución

Tenemos

$$\text{N.}^{\circ}\ \ell_1=n \quad \rightarrow \quad i_1 = \frac{180(n-2)}{n}$$

$$\text{N.}^{\circ}\ \ell_3=3n \quad \rightarrow \quad i_2 = \frac{180(3n-2)}{3n}$$

Como cada ángulo interior aumenta en 24°

$$\frac{180(n-2)}{n} + 24 = \frac{180^{\circ}(3n-2)}{3n} \quad \rightarrow \quad n=10$$

$$\therefore \quad \text{N.}^{\circ}\ D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(7)}{2} = 35$$

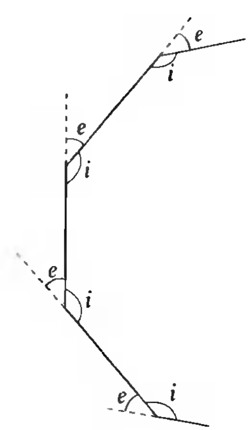
Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Quince veces la medida del ángulo interior de un polígono equiángulo es igual al cuadrado de la medida de su ángulo exterior. Calcule el número de diagonales que se pueden trazar de 4 vértices consecutivos.

A) 14 B) 15 C) 17
D) 18 E) 20

Resolución



$$i = \frac{180^{\circ}(n-2)}{n} \quad \text{y} \quad e = \frac{360}{n}$$

Del dato:

$$15i=e^2 \quad \rightarrow \quad 15\left(\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}\right) = \left(\frac{360^{\circ}}{n}\right)^2$$

$$15(n-2)=\frac{720°}{n} \quad \rightarrow \quad n(n-2)=48$$

$$8(8-2)=48=n(n-2) \quad \rightarrow \quad n=8$$

Piden calcular el N.° de diagonales que se pueden trazar desde 4 vértices consecutivos.

$$\text{N.° } D_4^8=(8)(4)-\frac{(4+1)(4+2)}{2}=32-15=17$$

$\therefore \ D_4^8=17$

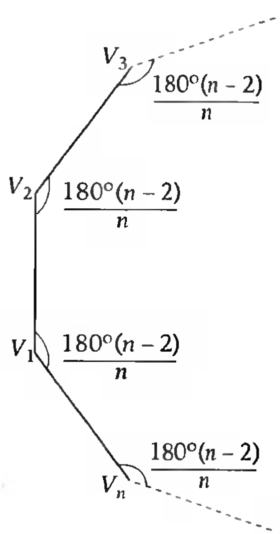
Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

En un polígono regular, si se duplica el número de lados, la medida de cada ángulo interno aumenta en 15°. Calcule el número de diagonales en el polígono.

A) 72 B) 64 C) 54
D) 48 E) 38

Resolución



$$\text{N.° } \ell_1=n \quad \rightarrow \quad i_{(n)}=\frac{180°(n-2)}{n}$$

$$\text{N.° } \ell_2=2n \quad \rightarrow \quad i_{(2n)}=i_{(n)}+15$$

Pero

$$i_{(2n)}=\frac{180°(2n-2)}{2n}=\frac{180°(n-2)}{n}+15$$

$$\frac{180°}{n}((n-1)-(n-2))=15°$$

$$\rightarrow \quad n=12$$

$$\therefore \ \text{N.° } D_{(n)}=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{12(9)}{2}=54$$

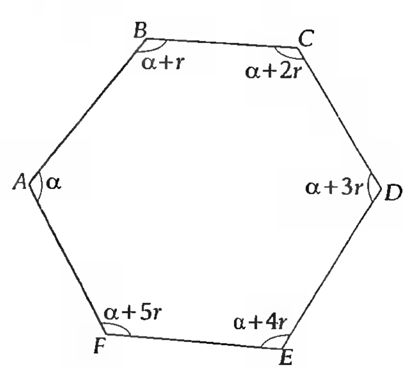
Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

Los ángulos de un hexágono convexo se encuentran en progresión aritmética. Calcule el mayor valor entero de la razón.

A) 22° B) 24° C) 23°
D) 25° E) 34°

Resolución



$\sum m\sphericalangle_{int}=180°(6-2)$

$6\alpha+15r=720°$

$2\alpha+5r=240°$ (I)

Como el polígono es convexo, cada medida angular debe ser menor de 180°.

$\rightarrow\ \alpha+5r<180°$ (II)

Reemplazamos (I) en (II)

$240°-\alpha<180°$

$\alpha>60°$

Pero

$\alpha=\dfrac{240°-5r}{2}$

$\dfrac{240°-5r}{2}>60° \rightarrow r<24°$

$\therefore\ r_{(\text{máx. entero})}=23°$

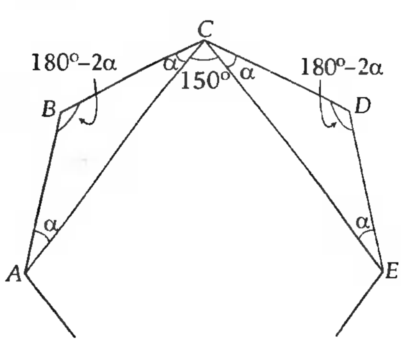
Clave **C**

PROBLEMA N.° 15

En un polígono regular *ABCDEFG...*, $m\sphericalangle ACE=150°$. Calcule el número de diagonales.

A) 247 B) 230 C) 209
D) 252 E) 529

Resolución



Los triángulos *ABC* y *CDE* son congruentes e isósceles, entonces $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle CDE=180-2\alpha$

$180°-2\alpha=2\alpha+150°$

$4\alpha=30° \rightarrow 2\alpha=15°$

Luego

$i=180°-2\alpha=165°=\dfrac{180°(n-2)}{n}$

$\rightarrow n=24$

Nos piden N.° de diagonales

$\text{N.° }D=\dfrac{n(n-3)}{2}=\dfrac{24(24-3)}{2}=252$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

El ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular miden θ y $(K-1)\theta$, respectivamente. ¿Cuáles son los valores enteros que puede tener K para que el polígono exista?

A) 2; 3 B) 1; 2; 3; 4
C) 1; 2; 3; 4; 5
D) 1; 2 E) 1; 2; 3

Resolución

En un polígono regular de n lados la medida de un ángulo interior y un exterior es

$\theta=\dfrac{180°(n-2)}{n} \quad \wedge \quad (K-1)\theta=\dfrac{360°}{n}$

$\rightarrow (K-1)\times\dfrac{180°(n-2)}{n}=\dfrac{360°}{n}$

$(K-1)(n-2)=2$

Luego, $n=\dfrac{2K}{(K-1)}$

Como n debe ser entero y mayor que 2.

$$\frac{2K}{(K-1)} > 2 \quad \rightarrow \quad 2K > 2K-2$$

Es decir, K podría tomar cualquier valor cuando

$K=1 \rightarrow n=\infty$

$K=2 \rightarrow n=4$

$K=3 \rightarrow n=3$

$K=4 \rightarrow n=8/3$
(no es entero)

$K=5 \rightarrow n=5/3$
(no es entero)

Como K y $K-1$ son números consecutivos para valores mayores que 3, n es fracción, entonces los únicos valores que puede tomar K serían: 1; 2 y 3.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 17

Se tiene un polígono convexo de n lados y M diagonales, tal que $M > 2n$. Calcule el menor valor entero de n.

A) 5 B) 6
C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

Si el N.° $\ell = n$ y N.° $D = M = \frac{n(n-3)}{2}$

Luego, del dato $M > 2n$

$$\frac{n(n-3)}{2} > 2n \quad \rightarrow \quad n-3 > 4$$

$$n > 7$$

Entonces, el menor valor entero de n es 8.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 38 diagonales desde 6 vértices consecutivos?

A) octágono B) undecágono
C) nonágono
D) decágono E) dodecágono

Resolución

Por fórmula sabemos que el número de diagonales que se pueden trazar desde K vértices consecutivos en un polígono de n lados es

$$\text{N.° } D_n^K = K \cdot n - \frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

En nuestro caso

$K=6$ y N.° $D_n^K = 38$

Luego

$$38 = 6 \times n - \frac{(7)(8)}{2}$$

$\rightarrow n=11$

Por lo tanto, el polígono resulta ser el undecágono.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

Cuánto debe medir uno de los ángulos de un polígono, si tiene 27 diagonales y todos sus ángulos interiores se encuentran en progresión aritmética.

A) 120° B) 130°
C) 140°
D) 150° E) 160°

Resolución

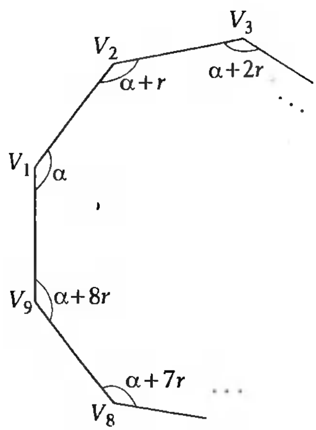
Si el número de diagonales de un polígono de n lados es 27, entonces podemos conocer el valor de n.

Así

$$\frac{n(n-3)}{2}=27$$

Luego

$$n(n-3)=9(9-3)=54 \rightarrow n=9$$



$$\Sigma m\measuredangle_{int}=180°(n-2)=180°\times 7$$

$$9\alpha+\frac{8(9)}{2}r=180°\times 7$$

$$9\alpha+36r=9\times 140° \rightarrow \alpha+4r=140°$$

Pero en V_5, su medida angular es $\alpha+4r$.

Por lo tanto, la medida de uno de sus ángulos es 140°.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

En un polígono convexo, reducimos a la tercera parte el número de lados, y las diagonales a 52. Calcule el número de diagonales trazadas desde 4 vértices consecutivos del polígono inicial.

A) 21 B) 25

C) 29

D) 33 E) 37

Resolución

$$\text{N.° } \ell_1 = n \qquad \text{N.° } D_1 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\text{N.° } \ell_2 = \frac{n}{3} \qquad \text{N.° } D_2 = \frac{\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3}-3\right)}{2}$$

$$\text{N.° } D_1-\text{N.° } D_2=52$$

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{n(n-9)}{18}=52$$

$$\rightarrow n=12$$

Nos piden el número de diagonales trazadas desde 4 vértices consecutivos.

$$\text{N.° } D_{12}^{4}=4\times 12-\frac{(4+1)(4+2)}{2}=33$$

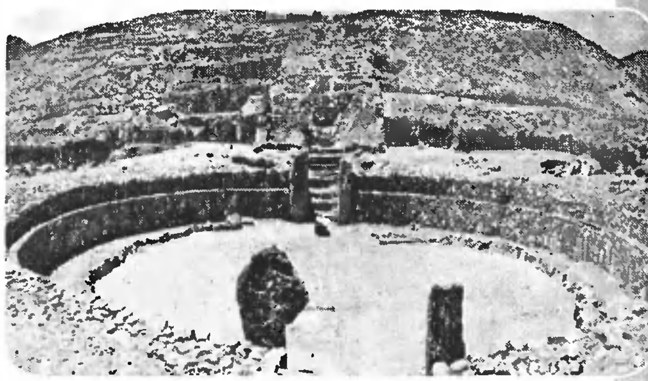
Por lo tanto, el número de diagonales trazadas desde 4 vértices consecutivos es 33.

Clave **D**

Capítulo

8

Circunferencias



En el antiguo Egipto y en diversas culturas similares, el uso de la rueda era muy importante, pues facilitaba el transporte de materiales que se empleaban para las edificaciones y construcciones.

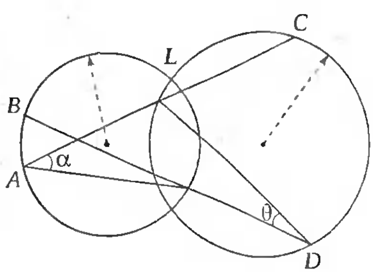
Recordemos también que en la antigua Babilonia se consideraba que el Sol giraba alrededor de la Tierra (teoría geocéntrica) y que la trayectoria descrita por el Sol era circunferencial.

En este capítulo se resolverán problemas relacionados con las propiedades fundamentales de las circunferencias, así como de los ángulos que se pueden trazar en ellas, además de las diversas posiciones relativas que pueden ocupar dos o más circunferencias.

Circunferencias

PROBLEMA N.° 1

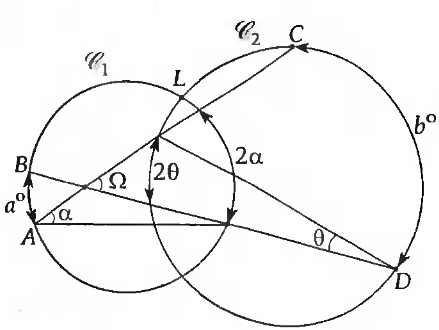
En el gráfico, $\alpha+\theta=26°$.
Determine $m\overset{\frown}{CD}-m\overset{\frown}{AB}$.



A) 26°   B) 32°   C) 52°
D) 46°   E) 40°

Resolución

Del dato: $\alpha+\theta=26°$
Piden $b°-a°$.



En $\mathscr{C}_1$: $\Omega=\dfrac{2\alpha+a}{2}$ (I)

En $\mathscr{C}_2$: $\Omega=\dfrac{b-2\theta}{2}$ (II)

De (I) y (II)

$2\alpha+a=b-2\theta$

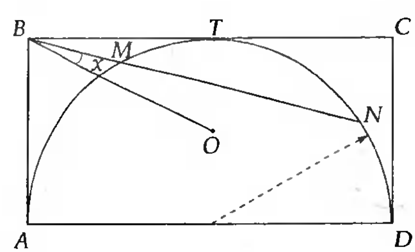
$\underbrace{2(\alpha+\theta)}_{26°}=b°-a°$

$\rightarrow\ b°-a°=52°$

Clave **C**

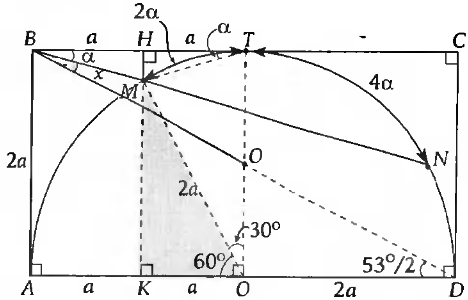
PROBLEMA N.° 2

Según el gráfico, $m\overset{\frown}{NT}=2(m\overset{\frown}{MT})$. Si O es el centro del rectángulo $ABCD$, calcule x.



A) 11°   B) 11° 30'   C) 15°
D) 15° 30'   E) 18° 30'

Resolución



Dato:

$$m\widehat{NT} = 2m\widehat{MT}$$

Sea

$$m\widehat{MT} = 2\alpha \quad \rightarrow \quad m\widehat{NT} = 4\alpha$$

Por ∢ ext. $m\sphericalangle NBT = \dfrac{m\widehat{NT} - m\widehat{MT}}{2} = \dfrac{4\alpha - 2\alpha}{2} = \alpha$

Como

$$m\sphericalangle MTB = \frac{m\widehat{MT}}{2} = \alpha \text{ (∢ semiinscrito)}$$

$$MB = MT \quad \rightarrow \quad BH = HT = a$$

Prolongamos $\overline{HM}$ hasta K

$$\rightarrow \quad AK = KO = a$$

y $OM = OA = 2a$

⊾ OMK: notable de 30° y 60°

$$m\sphericalangle KOM = 60° \text{ y } m\sphericalangle MOT = 30°$$

$$2\alpha = 30°$$

$$\rightarrow \alpha = 15°$$

Pero

$$m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle ADB = 53°/2$$

$$\rightarrow \quad x + 15° = 26°\,30'$$

$\therefore \quad x = 11°\,30'$

Clave **B**

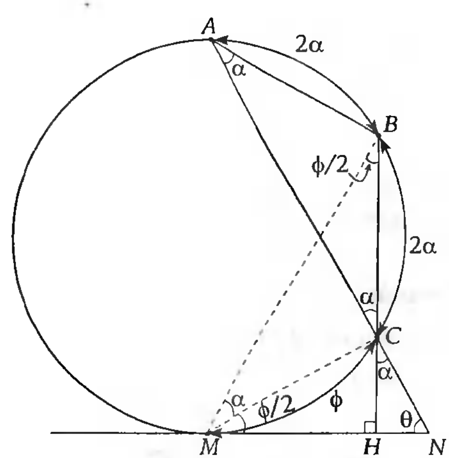
PROBLEMA N.° 3

Se tiene una circunferencia en la cual se ubican los puntos A, B y C, tal que $B \in \widehat{AC}$ y $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Si en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto N, por el cual se traza la tangente $\overleftrightarrow{NM}$ (M es punto de tangencia), y la prolongación de $\overline{BC}$ es perpendicular a $\overline{MN}$, calcule $\dfrac{m\sphericalangle CNM}{m\widehat{CM}}$.

A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3
D) 1/2 E) 1

Resolución

Piden $\dfrac{\theta}{\phi}$.



Si la $m\widehat{MC} = \phi$

$$\rightarrow \quad m\sphericalangle CMN = \frac{\theta}{2} = m\sphericalangle CBM$$

También la $m\sphericalangle BMC = \alpha$.

En el ⊾CHN

$$\theta = 90 - \alpha$$

En el ⊿MBH

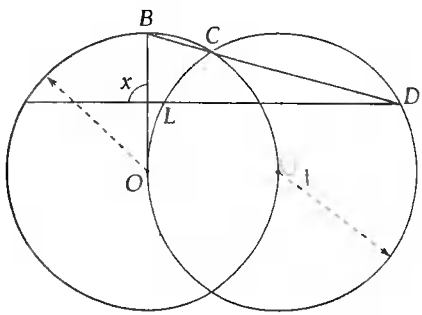
$$\alpha+2\left(\frac{\phi}{2}\right)=90° \rightarrow \phi=90-\alpha$$

$$\therefore \ \frac{\theta}{\phi}=\frac{90-\alpha}{90-\alpha}=1$$

Clave **E**

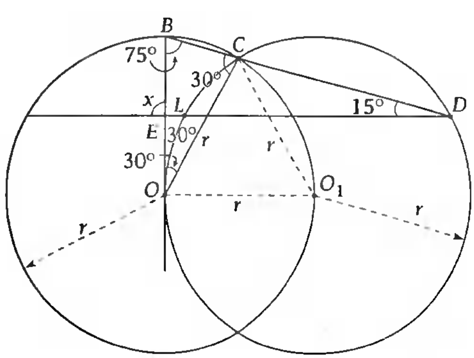
PROBLEMA N.° 4

Según el gráfico, O es punto de tangencia y $m\overset{\frown}{CL}=m\overset{\frown}{LO}$. Halle x.



A) 50°
B) 60°
C) 80°
D) 90°
E) 100°

Resolución



Al unir O, O_1 y C mediante segmentos, estos resultan ser radios de igual longitud, siendo el $\triangle OCO_1$ equilátero.

$$\rightarrow \ m\overset{\frown}{OC}=m\overset{\frown}{CO_1}=60°$$

Además

$$m\overset{\frown}{OL}=m\overset{\frown}{LC}=30° \ \rightarrow \ m\measuredangle LDC=15°$$

Tenemos

$$m\measuredangle BOC=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{OLC}=\frac{60°}{2}$$

$$m\measuredangle BOC=30° \ (\measuredangle \text{ semiinscrito})$$

Como

$$OB=OC=r$$

$$\rightarrow \ m\measuredangle OBC=m\measuredangle OCB=75°$$

Luego, en el $\triangle EBD$

$$x=75°+15°$$

$$\therefore \ x=90°$$

Clave **D**

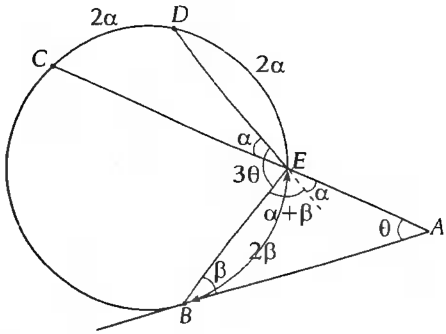
PROBLEMA N.° 5

Desde un punto A exterior a una circunferencia, se trazan una tangente $\overline{AB}$ (B es punto de tangencia) y una secante $\overline{AEC}$, las cuales forman un ángulo cuya medida es θ. Si $m\measuredangle BED=3\theta$ y D es punto medio del arco CE, indique el valor de θ.

A) 30°
B) 34°
C) 36°
D) 40°
E) 42°

Resolución

Tenemos $m\widehat{CD} = m\widehat{DE} = 2\alpha$



Sea

$m\widehat{BE} = 2\beta$

$m\measuredangle EBA = \beta$

En E: $\alpha+\beta+3\theta=180°$ (I)

En el $\triangle ABE$

$\theta+\beta=3\theta-\alpha \rightarrow \alpha+\beta=2\theta$ (II)

De (II) en (I)

$2\theta+3\theta=180°$

$\theta=36°$

Clave **C**

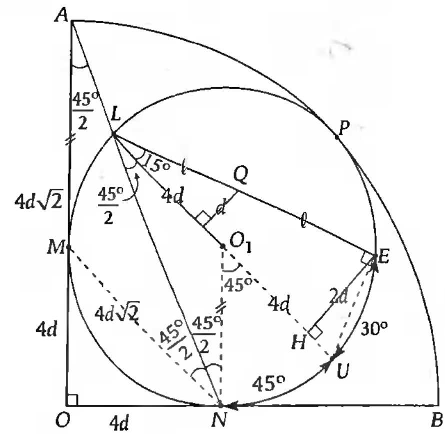
PROBLEMA N.° 6

En un cuadrante AOB de centro O se inscribe una circunferencia de centro O_1 tangente a $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\widehat{AB}$ en los puntos M, N y P, respectivamente, tal que $\overline{AN}$ interseca a la circunferencia en el punto L. Si ON es cuatro veces la distancia del punto medio de $\overline{LE}$ a $\overline{LO_1}$ $(E \in \widehat{NP})$, calcule la $m\widehat{NE}$.

A) 25° B) 68° C) 75°

D) 76° E) 82°

Resolución



Si $QH=d \rightarrow ON=4d=OM$

Sabemos que O, O_1 y P son colineales si trazamos

$$\overline{OO_1P} \rightarrow OP = \underbrace{OO_1}_{4d\sqrt{2}} + \underbrace{O_1P}_{4d} = OA = OB$$

Como $ON=4d \rightarrow MA=4d\sqrt{2}=MN$

$$\rightarrow m\measuredangle MAN = m\measuredangle MNA = \frac{45°}{2}$$

También

$$\overline{O_1N} // \overline{AO} \rightarrow m\measuredangle O_1NA = \frac{45°}{2}$$

Al prolongar $\overline{LO_1}$ hasta U $\rightarrow$ $LU=8d$

y $m\measuredangle LEU=90°$

En el $\triangle LEU$: notable de 15° y 75°, ya que

$$EH = 2d = \frac{LU}{4}$$

$$\rightarrow m\measuredangle ULE=15°$$

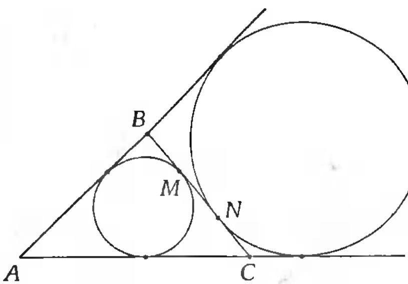
$$m\widehat{EN} = m\widehat{EU} + m\widehat{UN} = 30°+45°$$

$\therefore$ $m\widehat{EN} = 75°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

En el gráfico, las circunferencias son inscrita y ex inscrita al triángulo ABC. Si $AC=b$ y $AB=c$, calcule MN.



A) $\dfrac{c+b}{2}$

B) $3c-2b$

C) $2c-b$

D) $b-c$

E) $c-b$

Resolución

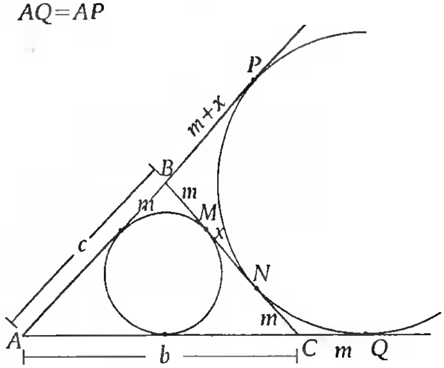
Sabemos que

$BM=NC=m$

$\rightarrow\ BP=BN=m+x$

Pero

$AQ=AP$



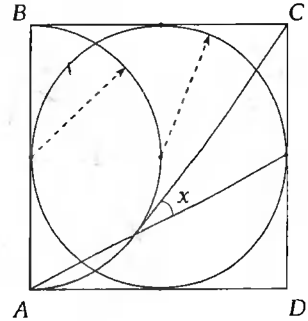
$\rightarrow\ b+m=c+m+x$

$\therefore\ x=b-c$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

En el gráfico, la circunferencia está inscrita al cuadrado $ABCD$. Calcule x.



A) 18° 30'

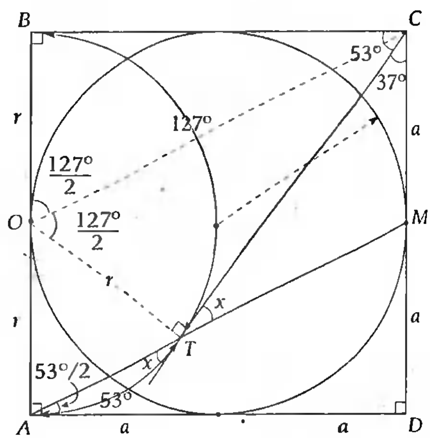
B) 18°

C) 26° 30'

D) 37°

E) 30°

Resolución



En el gráfico:

$$m\measuredangle MAD=\frac{53°}{2}$$

$$m\widehat{AT}=53° \quad\rightarrow\quad m\widehat{BT}=127°$$

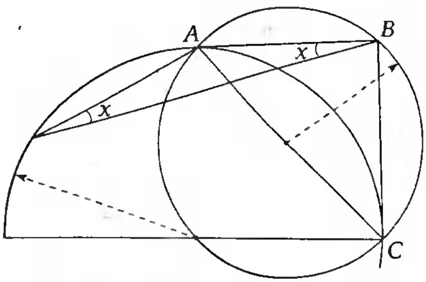
Cuando trazamos desde C la tangente a la semicircunferencia, el arco que determina esta tangente y $\overline{CB}$ en la semicircunferencia mide 127°; entonces, T es punto de tangencia.

$$\therefore\quad x=\frac{m\widehat{AT}}{2}=\frac{53°}{2}=26°30'$$

Clave **C**

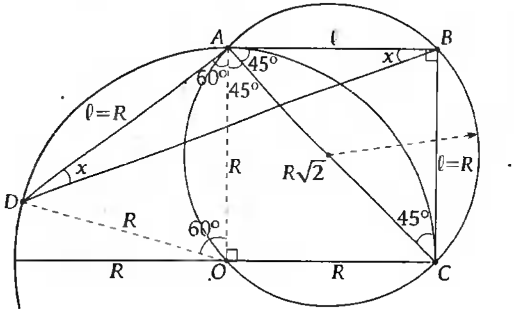
PROBLEMA N.° 9

En el gráfico, $AB=BC$. Calcule x.



A) 10° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 20°

Resolución



Como

$AB=BC=\ell$ y $m\sphericalangle ABC=90°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BCA=45°$

También

$OA=OC=R$ y $m\sphericalangle AOC=90°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle OAC=45°$

$AC=R\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $\ell=R$

Trazamos

$OD=R$ $\rightarrow$ $\triangle AOD$: equilátero

$m\sphericalangle OAD=60°$

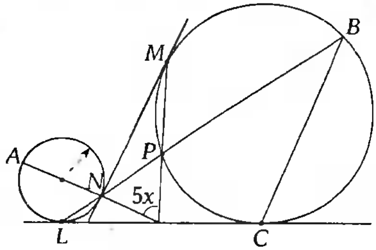
En el $\triangle BAD$: $2x+150°=180°$

$\therefore$ $x=15°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

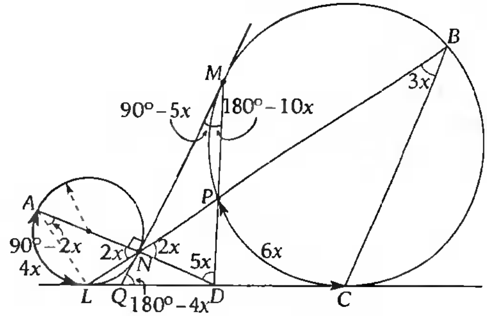
En el gráfico, L, N, M y C son puntos de tangencia, dado que $m\sphericalangle PBC=3x$ y $m\overset{\frown}{AL}=4x$. Calcule x.



A) 16° B) 18° C) 18° 30'
D) 22° 30' E) 26° 30'

Resolución

Sea $m\sphericalangle PBC=3x$ y $m\overset{\frown}{AL}=4x$



Tenemos que $m\sphericalangle ANL=2x$

Como

$m\sphericalangle ALN=90°$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle LAN=90°-2x$

Teniendo como resultado

$m\sphericalangle NQC=2(90°-2x)$ y $m\sphericalangle NQC=180°-4x$

Como el $\triangle NDM$ es rectángulo, entonces

$m\sphericalangle NMD=90°-5x$

$\rightarrow$ $m\overset{\frown}{MP}=2(90°-5x)=180°-10x$

También

$m\widehat{PC} = 2m\measuredangle PBC = 2(3x) = 6x$

En Q

$180° - 4x + (180° - 10x + 6x) = 180°$

$180° = 8x$

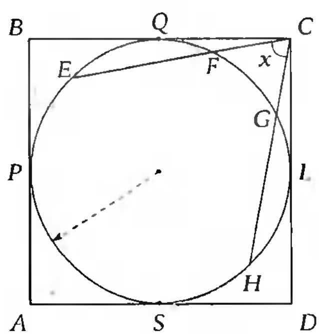
$\therefore \; x = 22°\,30'$

Clave **D**

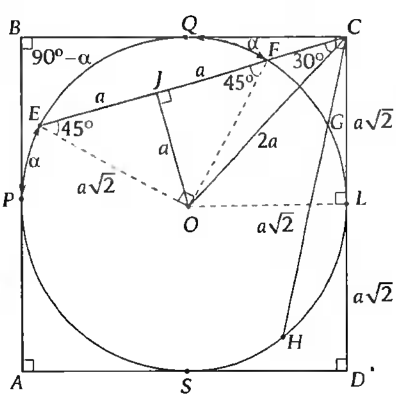
PROBLEMA N.° 11

En el gráfico, la circunferencia está inscrita al cuadrado $ABCD$.
Si $m\widehat{PE} = m\widehat{QF} = m\widehat{GL} = m\widehat{HS}$, calcule x.

A) 55°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 75°



Resolución



Sea $m\widehat{PE} = \alpha = m\widehat{QF} \;\rightarrow\; m\widehat{EQ} = 90° - \alpha$

De donde

$m\widehat{EQF} = 90°$ y $m\measuredangle EOF = 90°$

Trazamos $\overline{OJ} \perp \overline{EF}$

Como

$m\measuredangle OEF = m\measuredangle OFE = 45°$

entonces sea

$EJ = JF = OJ = a$

Luego

$OE = OF = OL = a\sqrt{2}$

También

$CL = LD = OL = a\sqrt{2} \;\rightarrow\; OC = 2a$

Luego, en el ⊾OJC

$m\measuredangle OCJ = 30°$

Análogamente

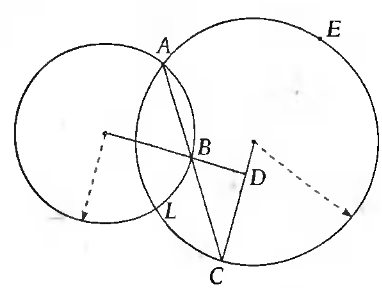
$m\measuredangle OCH = m\measuredangle OCE = 30°$

$\therefore \; x = 60°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 12

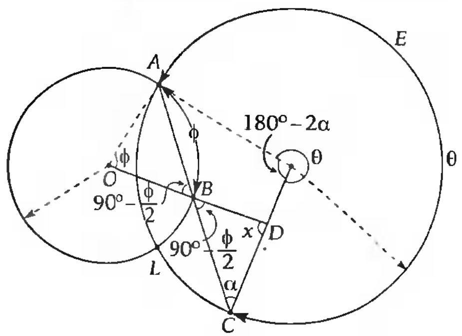
En el gráfico, $m\widehat{AEC} - m\widehat{AB} = 200°$. Calcule la $m\measuredangle BDC$.



A) 100° B) 90° C) 80°
D) 110° E) 120°

Resolución

Del dato: $m\widehat{AEC}-m\widehat{AB}=200°$ y $m\measuredangle BDC=x$



Sea $m\widehat{AB}=\phi$ y $m\measuredangle ACD=\alpha$

En el $\triangle AOB$: $m\measuredangle AOB=\phi$ y $m\measuredangle OBA=90°-\phi/2$

Luego, la $m\measuredangle DBC=90°-\phi/2$

En el $\triangle BDC$

$$x+\alpha+90-\frac{\phi}{2}=180° \qquad \text{(I)}$$

Pero

$$\theta+180-2\alpha=360$$

$$\theta-2\alpha=180° \;\rightarrow\; \theta=180+2\alpha$$

Luego

$$(180+2\alpha)-\phi=200°$$

Al dividirlo entre 2 obtenemos

$$\alpha+90-\frac{\phi}{2}=100° \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

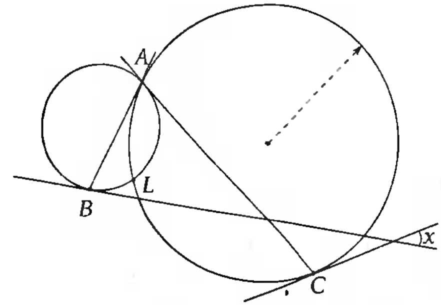
$$x+100°=180°$$

$\therefore\; x=80°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

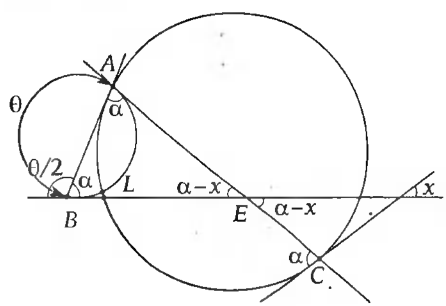
En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AB}>216°$, calcule el mayor entero de x.



A) 33° B) 34° C) 35°
D) 36° E) 37°

Resolución

Tenemos $\theta>216°$



En el $\triangle ABE$: $3\alpha-x=180°$

Además, en B

$$\alpha+\frac{\theta}{2}=180° \;\rightarrow\; \theta=2(180°-\alpha)>216°$$

$$360°-2\alpha>216° \;\rightarrow\; \alpha<72°$$

Pero $3\alpha=180°+x \;\rightarrow\; \alpha=60°+\dfrac{x}{3}$

Además

$$60°+\frac{x}{3}<72°$$

$$\frac{x}{3}<12°$$

$$x<36°$$

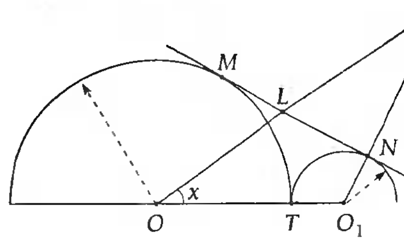
$\therefore\; x_{\text{máx. entero}}=35°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, M, N y T son puntos de tangencia. Si $\frac{OT}{4}=TO_1=ML=\frac{LN}{3}$, calcule x.

A) 30°
B) 39°
C) 53°
D) 37°
E) 45°



Resolución

Tenemos $\frac{OT}{4}=TO_1=a=ML=\frac{LN}{3}$

Como $OM=4a$ $\rightarrow$ ⊾OML: $m\measuredangle LOM=14°$

También $O_1N=MH=a$

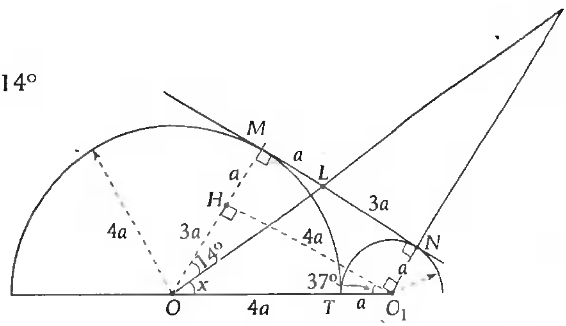
Luego

$OH=3a$ y $O_1H=4a$

$\rightarrow$ $m\measuredangle O_1OH=53°$

$14+x=53°$

$\therefore$ $x=39°$

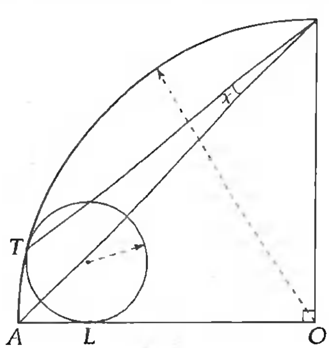


Clave **B**

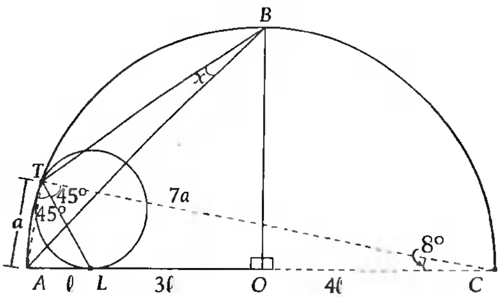
PROBLEMA N.° 15

En el gráfico, T y L son puntos de tangencia. Si $LO=3(AL)$, calcule x.

A) 6°
B) 7°
C) 8°
D) 16°
E) 14°



Resolución



Trazamos $\overline{AT}$ y $\overline{TC}$, siendo $OC=OA=OB$

Como $\overline{TL}$ es bisectriz de ATC, del teorema de la bisectriz

$$\rightarrow \quad \frac{AT}{TC}=\frac{AL}{LC}=\frac{\ell}{7\ell}$$

Si $AT=a$ $\rightarrow$ $TC=7a$

Como $m\sphericalangle ATC=90°$ y $TC=7(AT)$

En el $\triangle ATC$: $m\sphericalangle ACT=8°$ $\rightarrow$ $m\overset{\frown}{AT}=16°$

$\therefore$ $m\sphericalangle ABT=x=8°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ están inscritas en los triángulos ABC y ABH. Calcule x.

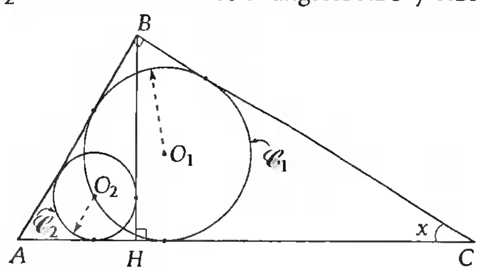
A) 15°

B) 30°

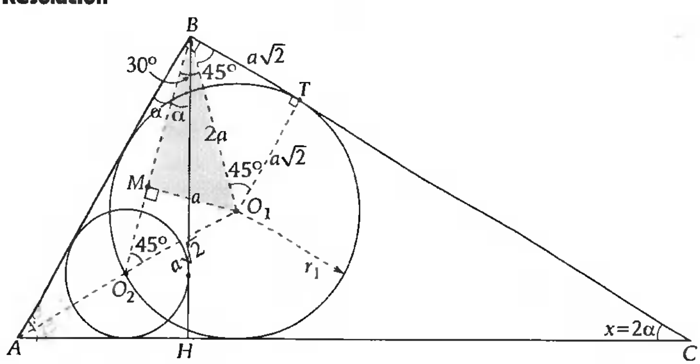
C) 37°

D) 22° 30'

E) 32°



Resolución



En el $\triangle ABH$: $2\alpha+2\beta=90°$

$\rightarrow$ $\alpha+\beta=45°$

Como $m\sphericalangle BO_2O_1=45°$

trazamos $\overline{O_1M} \perp \overline{BO_2}$

Si $O_1M=a$

$\rightarrow$ $O_1O_2=a\sqrt{2}=r_1$

Como BO_1 es bisectriz

$\rightarrow$ $m\sphericalangle O_1BT=45°$

Si $O_1T=a\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $BO_1=2a$

Luego, en el $\triangle O_1BM$: $m\sphericalangle O_1BM=30°$ $\rightarrow$ $\alpha+30°=45°$ $\rightarrow$ $\alpha=15°$. Como $x=m\sphericalangle ABH=2\alpha$

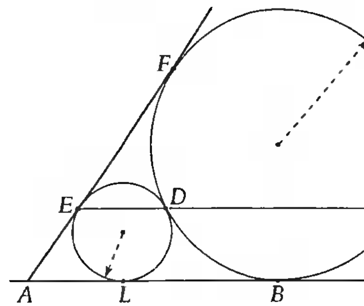
$\therefore$ $x=30°$

Clave **B**

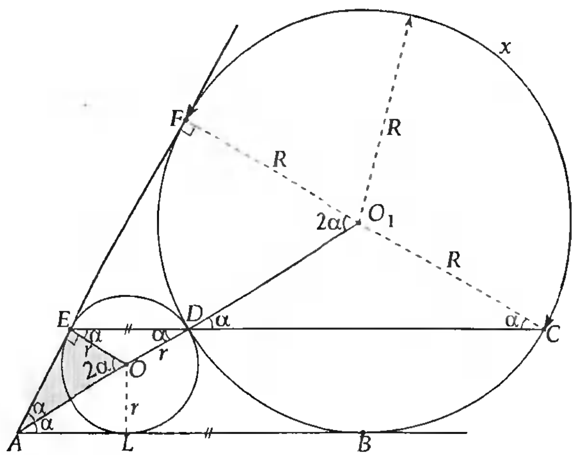
PROBLEMA N.° 17

Según el gráfico, B, D, L, E y F son puntos de tangencia; además, $\overline{CD}//\overline{AB}$. Calcule $m\widehat{FC}$.

A) 120°
B) 140°
C) 180°
D) 40°
E) 100°



Resolución



Al ser D punto de tangencia, entonces, A, O, D y O_1 son colineales como $\overline{ED}//\overline{AL}$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle ADE = \alpha$

$OE = OD = r$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle OED = \alpha$

$m\sphericalangle EOA = 2\alpha$

Pero, $m\sphericalangle AEO = 90°$ $\rightarrow$ $\triangle AEO$: $\alpha = 30°$

Luego, $m\sphericalangle AO_1F = 2\alpha = 60°$

Además, en el $\triangle DO_1C$: $m\sphericalangle DO_1C = 120°$. Entonces, F, O_1 y C son colineales.

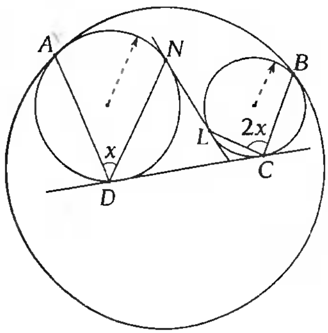
$\therefore$ $m\widehat{FC} = 180°$

Clave **C**

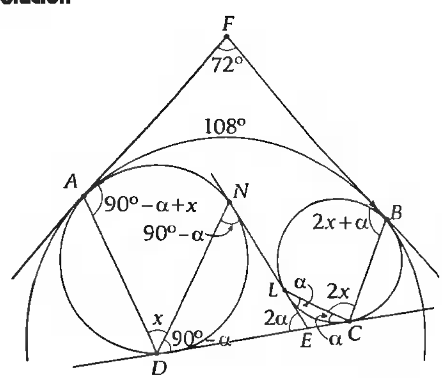
PROBLEMA N.° 18

En el gráfico, los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *N* y *L* son puntos de tangencia. Si m$\overset{\frown}{AB}$ = 108°, halle *x*.

A) 42
B) 48°
C) 52°
D) 56°
E) 60°



Resolución



Tenemos

$EC=EL \;\rightarrow\; m\measuredangle ECL=m\measuredangle ELC=\alpha$

Además $m\measuredangle DEN=2\alpha$

$ED=EN \;\rightarrow\; m\measuredangle NDE=m\measuredangle DNE=90-\alpha$

$m\measuredangle DAF=m\measuredangle ADC=90-\alpha+x$

También $m\measuredangle CBF=m\measuredangle BCD=2x+\alpha$

Si $m\overset{\frown}{AB}=108° \;\rightarrow\; m\measuredangle AFB=72°$

Luego, en el pentágono *AFBCD*: $\Sigma m\measuredangle\text{int}=540°$

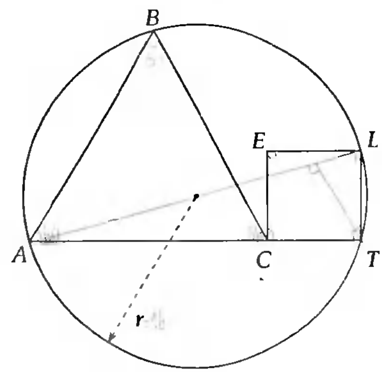
$72°+2(2x+\alpha)+2(90-\alpha+x)=540°$

$\therefore\; x=48°$

Clave **B**

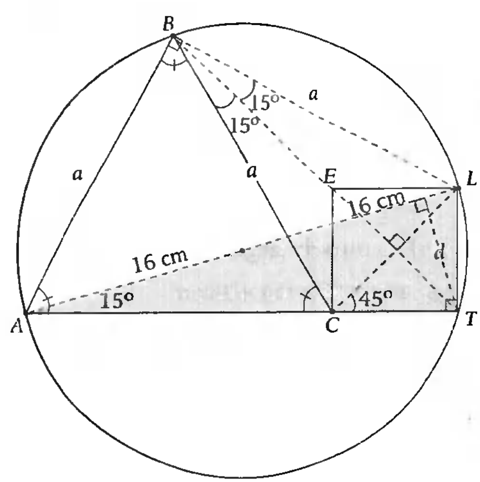
PROBLEMA N.° 19

En el gráfico, *r*=16 cm. Si el triángulo *ABC* es equilátero y *ELTC* un cuadrado, determine la distancia de *T* a $\overline{LA}$.



A) 10 cm
B) 8 cm
C) 6 cm
D) 4 cm
E) 2 cm

Resolución



Como $m\measuredangle ATL=90°$

Tenemos, $\overline{AL}$ es diámetro $\rightarrow$ $m\measuredangle ABL=90°$

Como

m$\measuredangle LCT=45°$ y $BA=BC=a$

entonces

$BL=a$

$\triangle BCE \cong \triangle BLE$ (L. A. L.)

$\rightarrow \quad E \in \overline{BT}$

m$\measuredangle CBT$=m$\measuredangle LBT=15°$

$\rightarrow \quad$ m$\measuredangle TAL=15°$

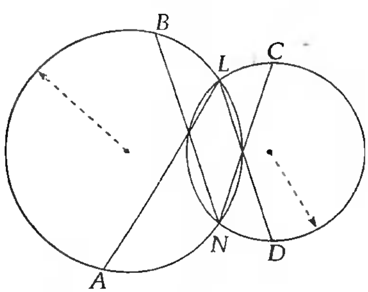
En $\triangle ATL$ (notable de 15° y 75°)

$\therefore \quad d=\dfrac{AL}{4}=\dfrac{32}{4}=8$ cm

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

En el gráfico, m$\overset{\frown}{BL}$=m$\overset{\frown}{LC}$ y m$\overset{\frown}{AB}$=176°. Calcule la m$\overset{\frown}{CD}$.

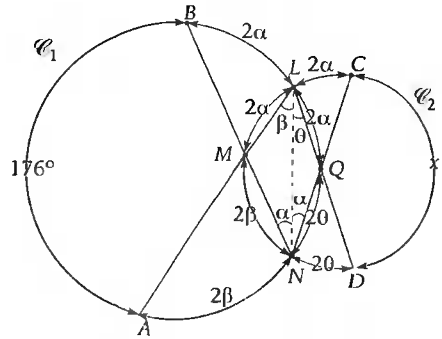


A) 167°
B) 140°
C) 176°
D) 188°
E) 180°

Resolución

Del dato:

$$m\overset{\frown}{BL}=m\overset{\frown}{LC} \text{ y } m\overset{\frown}{AB}=176°$$



Sea

m$\overset{\frown}{BL}=2\alpha=m\overset{\frown}{LC}$ $\rightarrow$ m$\measuredangle BNL$=m$\measuredangle CNL=\alpha$

Además

m$\overset{\frown}{LM}=2\alpha$ y m$\overset{\frown}{LQ}=2\alpha$

Si m$\measuredangle MLN=\beta$

$\rightarrow \quad$ m$\overset{\frown}{MN}=2\beta=m\overset{\frown}{AN}$

Si m$\measuredangle NLQ=\theta$

$\rightarrow \quad$ m$\overset{\frown}{NQ}=2\theta=m\overset{\frown}{ND}$

Luego en $\mathscr{C}_1$:

$$4\alpha+2\theta+2\beta+176=360°$$

$$\rightarrow \quad 4\alpha+2\theta+2\beta=184°$$

En $\mathscr{C}_2$:

$$\underbrace{4\alpha+2\beta+2\theta}_{184°}+x=360°$$

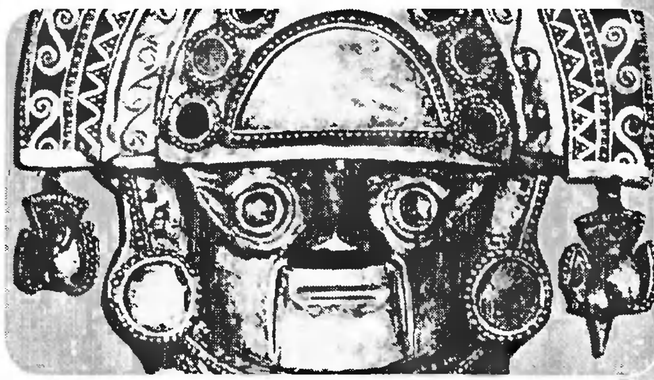
$\therefore \quad x=176°$

Clave **C**

Capítulo

9

Figuras inscritas y circunscritas



En diversas situaciones geométricas entre dos figuras, una de ellas puede ubicarse en el interior o exterior de la otra; de ese modo, podremos relacionar sus elementos bajo ciertas condiciones. Otra posición relativa importante entre dos figuras será cuando una de ellas está inscrita o circunscrita en la otra.

Por ejemplo, diremos que un polígono está inscrito en otro cuando todos los vértices de uno de ellos pertenecen a los lados del otro; al mismo tiempo, este segundo polígono se dice que está circunscrito al primero. En el caso de las circunferencias, si están inscritas deben ser tangentes a todos los lados del polígono, y si están circunscritas, los vértices del polígono le deben pertenecer a ella.

En este capítulo presentamos soluciones a problemas de cuadriláteros inscritos e inscriptibles, así como de cuadriláteros ex inscritos, circunscritos y bicéntricos; además, en otros problemas emplearemos los teoremas de Poncelet, Pitot y Steiner.

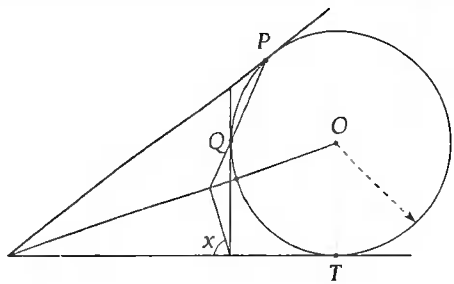
Capítulo 9

Figuras inscritas y circunscritas

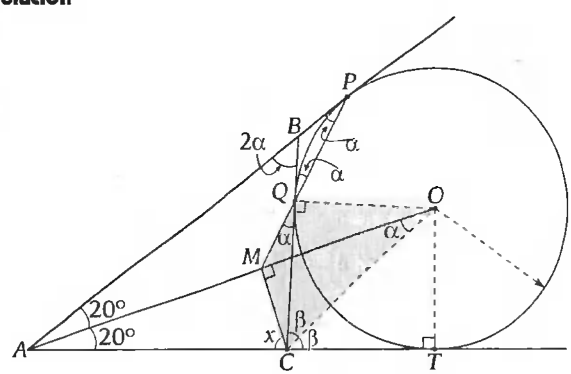
PROBLEMA N.° 1

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{PT}=140°$, calcule x.

A) 45°
B) 70°
C) 40°
D) 80°
E) 50°



Resolución



Del dato:

$m\widehat{PT}=140°$

$\underbrace{m\widehat{PT}}_{140°}+m\measuredangle PAT=180°$

$m\measuredangle PAT=40°$

$\rightarrow\ m\measuredangle PAO=m\measuredangle TAO=20°$

$m\measuredangle BQP=m\measuredangle BPQ=\alpha$

$\rightarrow\ m\measuredangle QBA=2\alpha$

En el $\triangle ABC$: $m\measuredangle AOC=\dfrac{1}{2}m\measuredangle ABC=\dfrac{1}{2}(2\alpha)=\alpha\ \ \rightarrow\ m\measuredangle MQC=m\measuredangle MOC=\alpha$

El cuadrilátero $CMQO$ es inscriptible $\ \rightarrow\ m\measuredangle CMO=m\measuredangle CQO=90°$

Luego, en el ⊿AMC: $x+20°=90°$

$\therefore\ x=70°$

Clave **B**

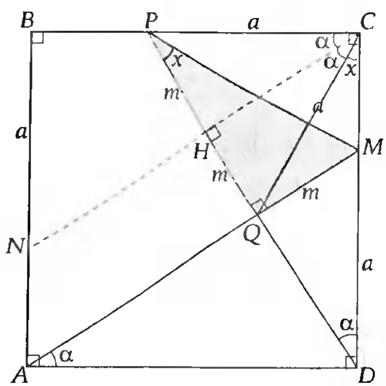
PROBLEMA N.° 2

Dado un cuadrado $ABCD$, en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y M, tal que $\overline{AM}$ y $\overline{DP}$ se intersecan perpendicularmente en Q. Si $PC=CQ$, halle m∢MCQ.

A) 18° B) 22° 30' C) 18° 30'
D) 30° E) 26° 30'

Resolución

En el gráfico



Sea

$PC=a \rightarrow CQ=a$

Si $\overline{AM} \perp \overline{PD}$

En ⊿PCD ≅ ⊿MDA (A. L. A.)

$\rightarrow MD=PC=a$

Trazamos $\overline{CN} \perp \overline{PD}$

En ⊿NBC ≅ ⊿PCD (A. L. A.)

$\rightarrow NB=PC=a$

Luego, en el △PCQ: isósceles

$PH=HQ=m$

En ⊿PHC ≅ ⊿MQD (A. L. A.)

$\therefore\ MQ=PH=m$

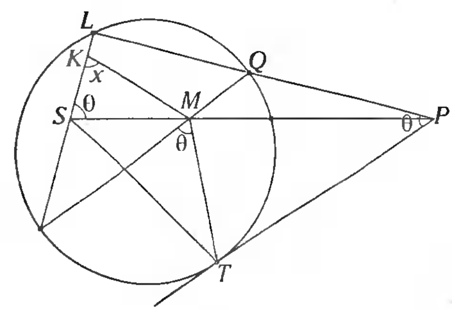
Como el cuadrilátero $PQMC$ es inscriptible, la m∢MPQ=m∢MCQ

$$\therefore\quad x=\frac{53°}{2}=26°\,30'$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 3

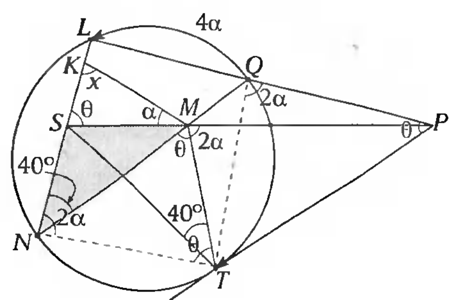
En el gráfico, T es punto de tangencia.
Si m∢$\overset{\frown}{LQT}$=4(m∢KMS) y m∢MTS=40°, señale x.



A) 40° B) 80° C) 70°
D) 35° E) 20°

Resolución

Sea m∢KMS=α → m$\overset{\frown}{LQT}$ = 4α



Cuadrilátero $TMQP$ es inscriptible

$(m\sphericalangle TMN=m\sphericalangle TPQ=\theta)$

$\rightarrow\ m\sphericalangle TMP=m\sphericalangle TQP=2\alpha$

$NLQT$ es cuadrilátero inscrito

$\rightarrow\ m\sphericalangle LNT=m\sphericalangle TQP=2\alpha$

Además, el cuadrilátero $NSMT$ es inscriptible

$\rightarrow\ m\sphericalangle SNM=m\sphericalangle STM=40°$

En el $\triangle NSM$

$\theta+(\theta+2\alpha)=180°+40°$

$\theta+\alpha=110°$

Luego, en el $\triangle SMK$

$\underbrace{\alpha+\theta}_{110°}+x=180°$

$\therefore\ x=70°$

Clave **C**

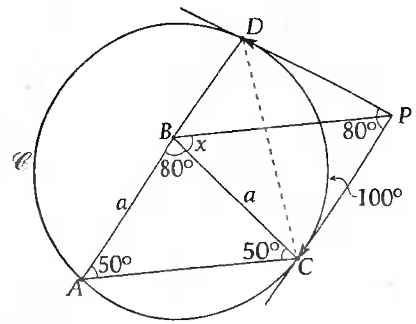
PROBLEMA N.° 4

Desde un punto P, exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$, se trazan las tangentes PD y PC (D y C, puntos de tangencia).
Si en $\mathscr{C}$ se ubica el punto A y en $\overline{AD}$ se ubica el punto B, tal que $AB=BC$ y la $m\sphericalangle DAC=50°$, determine $m\sphericalangle PBC$ ($A\in$ al mayor arco $\overset{\frown}{CD}$)

A) 50° B) 40°
C) 80°
D) 60° E) 65°

Resolución

En el gráfico



Si $AB=BC$

$m\sphericalangle ACB=m\sphericalangle CAB=50°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle ABC=80°$

Si $m\sphericalangle DAC=50°$

$m\overset{\frown}{CD}=100°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle DPC=80°$

Luego, el cuadrilátero $PDBC$ es inscriptible

$\rightarrow\ m\sphericalangle CDP=m\sphericalangle CBP=x$

En el $\triangle DPC$

$m\sphericalangle DCP=m\sphericalangle CDP=x$

$2x+80°=180°$

$\therefore\ x=50°$

Clave **A**

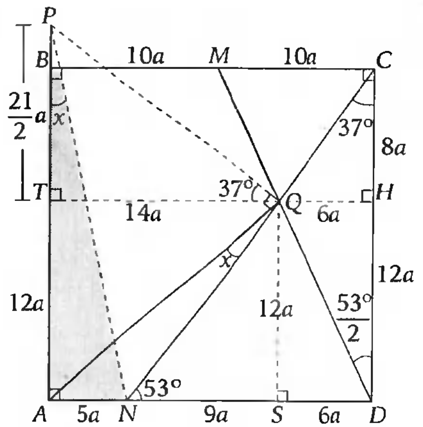
PROBLEMA N.° 5

En un cuadrado $ABCD$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y en $\overline{AD}$ se ubica el punto N, tal que $DN=3(AN)$. Si $\overline{DM}$ y $\overline{CN}$ se intersecan en Q, calcule $m\sphericalangle AQN$.

A) 18° 30' B) 26° 30' C) 15°
D) 12° 30' E) 14°

Resolución

En el gráfico



Si $BM=MC$

$\rightarrow$ m∢$MDC=53°/2$

Y cuando $ND=3(AN)$

$\rightarrow$ m∢$CND=53°$

Trazamos por Q la recta perpendicular a $\overline{NC}$, formando el cuadrilátero inscriptible $ANQP$.

$\rightarrow$ m∢APN=m∢$AQN=x$

Ahora trataremos de encontrar la relación entre AN y AP (P en la prolongación de $\overline{AB}$).

Si $QH=6a$ $\rightarrow$ $CH=8a$

y $HD=12a$

$\rightarrow$ $AB=BC=20a$

Del gráfico:

$ND=15a$

$AN=5a$

$TH=20a$

$\rightarrow$ $TQ=14a$ y m∢$TQP=37°$

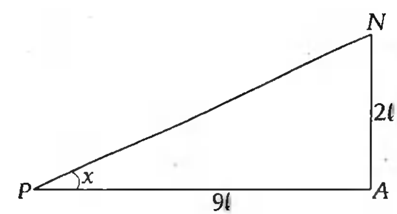
Además, $PT=\dfrac{21}{2}a$

Como $AT=HD=12a$

$$PA=\frac{21}{2}a+12a$$

$$\rightarrow \quad PA=\frac{45}{2}a$$

Si $5a=2\ell$, entonces tenemos:

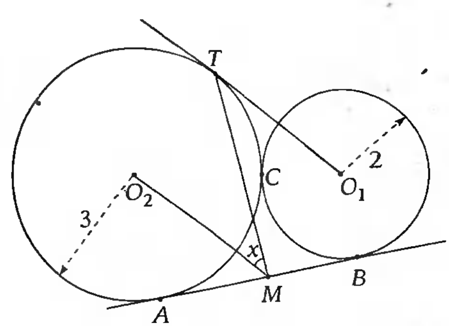


$\therefore$ $x=12°\ 30'$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

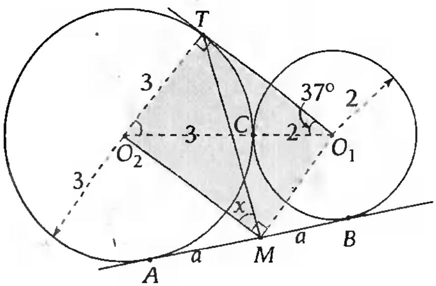
Calcule x, si $AM = MB$. Considere que A, B, C y T son puntos de tangencia.



A) 37° B) 53° C) 18°
D) 23° E) 14°

Resolución

En el gráfico



Si $AM=MB$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle O_2MO_1=90°$

Del dato, el cuadrilátero O_2TO_1M es inscriptible, pero

$O_2T=O_2C=3$, y $O_1C=2$

Además, $\triangle O_2TO_1$: notable de 37° y 53°

$\rightarrow$ $m\sphericalangle O_2O_1T=37°$

Luego

$m\sphericalangle O_2MT=m\sphericalangle O_2O_1T=37$

$\therefore$ $x=37°$

Clave **A**

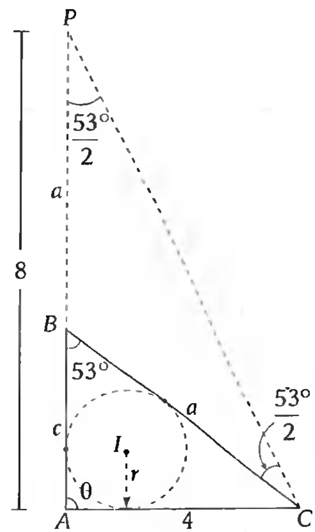
PROBLEMA N.° 7

En un triángulo ABC, $AC=4$ y $AB+BC=8$. Si $m\sphericalangle ABC=53°$, halle el inradio del triángulo ABC.

A) 1
B) 1,2
C) 1,5
D) 1,6
E) 1,8

Resolución

En el gráfico



$c+a=8$

Prolongamos $\overline{AB}$ hasta P, de modo que

$BP=BC=a$

$\rightarrow$ $AP=c+a=8$

Como

$m\sphericalangle BPC=53°/2$ y

$PA=2(AC)$

$\rightarrow$ $\theta=90°$

$\therefore$ $c=3$ y $a=5$

Luego, aplicando el teorema de V. Poncelet en el $\triangle BAC$

$c+4=a+2r$

$3+4=5+2r$

$\therefore$ $r=1$

Clave **A**

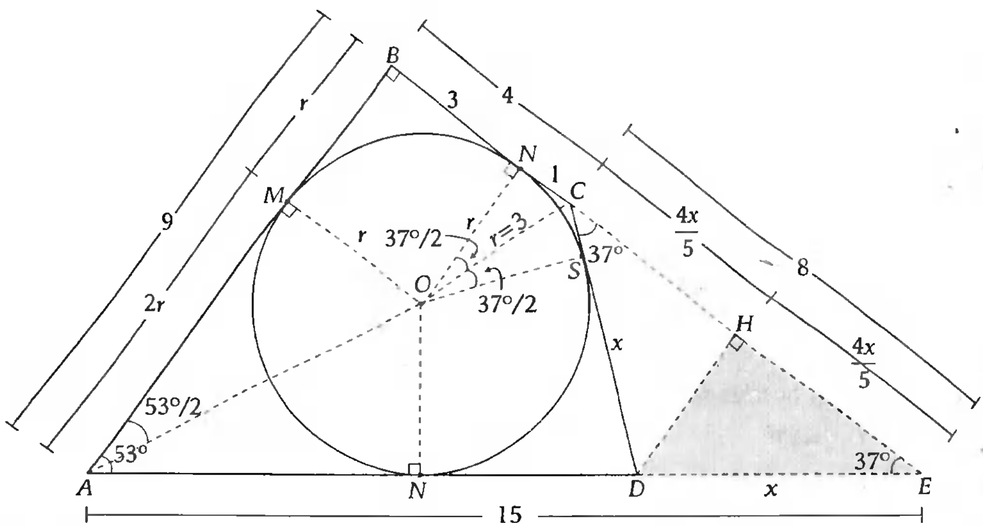
PROBLEMA N.° 8

En un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia, $AB=9$; $BC=4$, $m\sphericalangle BAD=53°$ y $m\sphericalangle ABC=90°$. Indique CD.

A) 4 B) 6 C) 5 D) 8 E) $4\sqrt{2}$

Resolución

Sea $CD=x$



Al trazar $\overline{AO}$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle OAB=m\sphericalangle AOD=53°/2$

Si $OM=r$ $\rightarrow$ $AM=2r$ y $MB=BN=r$

Luego, $AB=3r=9$ $\rightarrow$ $r=3$

Al prolongar $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ hasta que se intersequen en E, la $m\sphericalangle AEB=37°$, $BE=12$ y $AE=15$

$\rightarrow$ $CE=8$

También $NC=1=CS$ y $r=3$

$m\sphericalangle CON=m\sphericalangle COS=37°/2$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle SCE=m\sphericalangle SON=37°$

Luego, $CD=DE=x$ $\rightarrow$ al trazar $\overline{DH}\perp\overline{CE}$

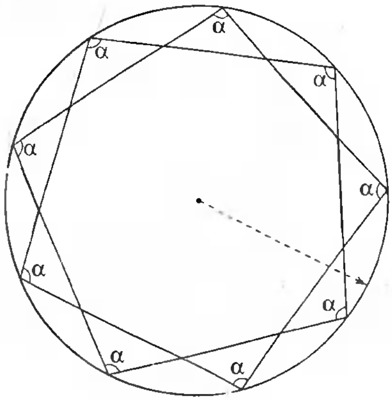
$$CH=HE=\frac{4x}{5} \rightarrow \frac{8x}{5}=8$$

$\therefore$ $x=5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

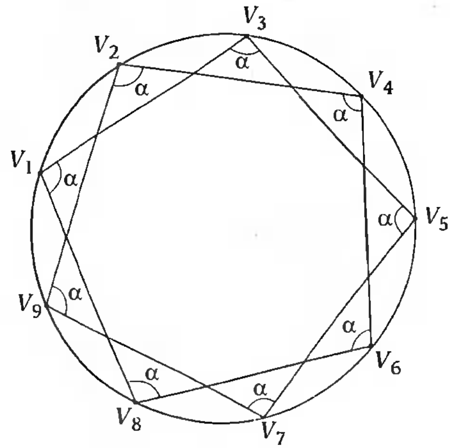
En el gráfico, calcule α.



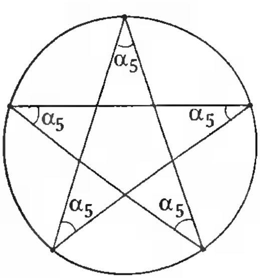
A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 108°

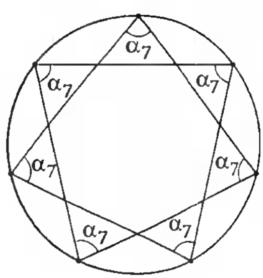
Resolución

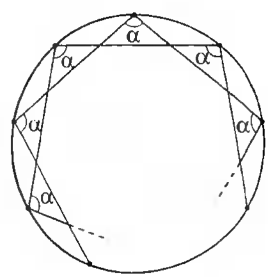
En el gráfico



Este problema puede resolverse generalizando casos particulares de estrellas equiángulas inscritas en circunferencias de 5; 7; ...; $(2n+1)$ vértices. $(\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 2)$







$$\frac{2\alpha_5}{1} = \frac{360°}{5}$$

$$\rightarrow \quad \alpha_5 = 36°$$

$$\frac{2\alpha_7}{3} = \frac{360°}{7}$$

$$\rightarrow \quad a_7 = \frac{540°}{7}$$

$$\frac{2\alpha_n}{n-4} = \frac{360°}{n}$$

$$\rightarrow \quad \alpha_n = \frac{180°(n-4)}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{2\alpha_9}{5} = \frac{360°}{9} \quad \rightarrow \quad \alpha_9 = 100°$$

Clave **B**

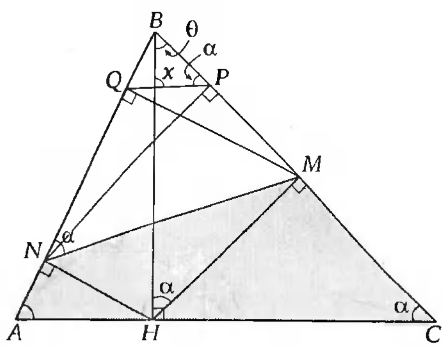
PROBLEMA N.° 10

En un triángulo ABC se traza la altura BH. Dado que M y N son las proyecciones de H sobre $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, además P y Q son las proyecciones de N y M sobre $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{BH}$.

A) 45° B) 72° C) 90°
D) 120° E) 60°

Resolución

En el gráfico



Del teorema de Taylor sabemos que el cuadrilátero $ANMC$ es inscriptible, por lo tanto

$m\sphericalangle MNB = m\sphericalangle ACB = \alpha$

Pero como el cuadrilátero $MNQP$ también es inscriptible, entonces

$m\sphericalangle BPQ = m\sphericalangle MNQ = \alpha$

Luego, en el ⊾HBC

$\alpha + \beta = 90°$

$\therefore\ x = 90°$

Clave C

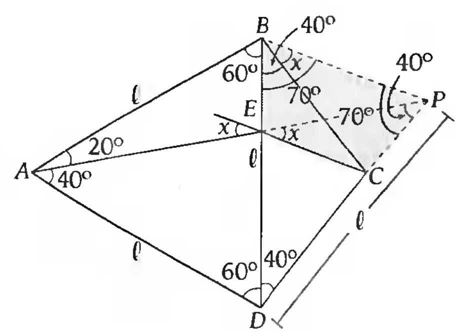
PROBLEMA N.° 11

En un trapezoide simétrico $ABCD$, $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ADC = 100°$. Si en $\overline{BD}$ se ubica el punto E, tal que $m\sphericalangle EAD = 2(m\sphericalangle EAB) = 40°$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$.

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 37° E) 53°

Resolución

En el gráfico



Como $m\sphericalangle BAD = 60°$, el triángulo ABD es equilátero

$\rightarrow\ m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ADB = 60°$ y

$m\sphericalangle BDC = m\sphericalangle DBC = 40°$

Al prolongar $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ hasta P

$\rightarrow\ m\sphericalangle APD = 40°$

El cuadrilátero $EBPC$ es inscriptible.

Luego

$m\sphericalangle CED = m\sphericalangle CBD = x$

Como

$DB=DP=\ell \rightarrow 40+x=70°$

$\therefore\ x=30°$

Clave **B**

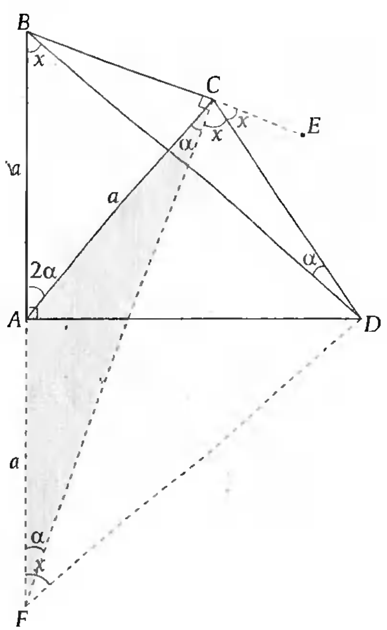
PROBLEMA N.° 12

En un cuadrilátero $ABCD$, $m\sphericalangle BAD=90°$, y $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle BDC)$.
Si en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto E y $m\sphericalangle ECD=m\sphericalangle ABD=x$, señale el valor de x.

A) 60° B) 30° C) 45°
D) 75° E) 40°

Resolución

En el gráfico



Prolongamos $\overline{BA}$ hasta F, de manera que

$FA=AB=a$

$\rightarrow\ m\sphericalangle DFB=m\sphericalangle DBF=x$

Luego, el cuadrilátero $FBCD$ es inscriptible.

$m\sphericalangle BFC=m\sphericalangle BDC=\alpha$ y

$m\sphericalangle DCF=m\sphericalangle DBF=x$

- En el $\triangle ACF$

  si $m\sphericalangle CAB=2\alpha$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle ACF=\alpha$

  Además

  $AC=AF=a$

- En el triángulo BCF

  $CA=BA=AF=a$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle BCF=90°$

En C

$2x+90=180°$

$\therefore\ x=45°$

Clave **C**

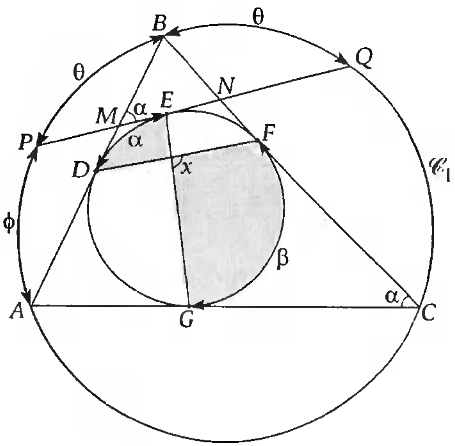
PROBLEMA N.° 13

Dado ABC, un triángulo inscrito en una circunferencia $\mathscr{C}_1$, en $\mathscr{C}_1$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC y secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N.
Si $m\overset{\frown}{PB}=m\overset{\frown}{BQ}$, calcule la medida del ángulo determinado por los segmentos que unen los puntos de tangencia de los lados opuestos del cuadrilátero circunscrito $AMNC$.

A) 60° B) 45°
C) 75°
D) 90° E) 72°

Resolución

En el gráfico



Sea $m\widehat{PB}=m\widehat{BQ}=\theta$

y $m\widehat{AP}=\phi$

- En el ángulo interior BMQ

$$\alpha=\frac{\theta+\phi}{2}$$

- En el ángulo inscrito BCA

$$m\measuredangle BCA=\frac{m\widehat{APB}}{2}=\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle BCA=\alpha$$

Pero, F y G son puntos de tangencia

$\rightarrow\ \alpha+\beta=180°$

Si $\overline{ME}$ y $\overline{MD}$ son tangentes

$\rightarrow\ \measuredangle m\widehat{DE}=m\measuredangle BME=\alpha$

Luego, en la circunferencia inscrita

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{180°}{2}=90°$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

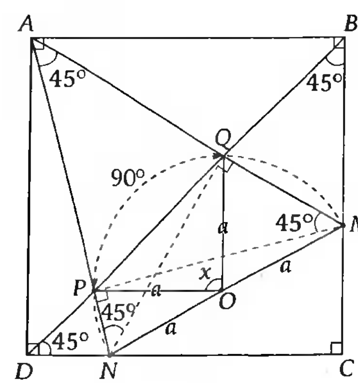
Dado un cuadrado $ABCD$, en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y N, tal que $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{AM}$ intersecan $\overline{BD}$ en P y Q, respectivamente. Si O es el punto medio de MN y la $m\measuredangle MAN=45°$, indique la $m\measuredangle POQ$.

A) 90°   B) 60°   C) 135°

D) 67° 30'   E) 75°

Resolución

En el gráfico



$NO=OM=a$

$m\measuredangle NAM=45°$

Como

$m\measuredangle DBC=m\measuredangle BDC=45°$

entonces, el cuadilátero $ADNQ$ es inscriptible.

$m\measuredangle AQN=90°$

También, el cuadilátero $ABMP$ es inscriptible.

$m\measuredangle APM=90°$

En los triángulos rectángulos NPM y NQM.

$OP=OQ=ON=OM=a$

Como

$m\sphericalangle ANQ = m\sphericalangle ADQ = 45°$ y $m\widehat{PQ} = 90°$

$\therefore$ $m\sphericalangle POQ = 90°$ (ángulo central)

Clave **A**

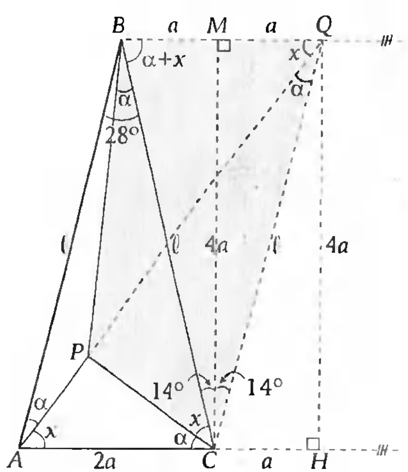
PROBLEMA N.° 15

Dado un triángulo isósceles ABC, ($AB=BC$), en la región interior se ubica el punto P, tal que $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PCA$. Si $m\sphericalangle ABC = 28°$, calcule $m\sphericalangle PAC$.

A) 37° B) 28° C) 62°
D) 31° E) 53°

Resolución

En el gráfico



Como $AB = BC = \ell$

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA = x + \alpha$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PCB = x$

Al prolongar $\overline{AP}$ y trazar por B la recta paralela a $\overline{AC}$, estas se intersecan en Q.

Luego

$m\sphericalangle AQB = x$

Si

$m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle PQB = x$

entonces, el cuadrilátero $PBQC$ es inscriptible.

$m\sphericalangle PQC = m\sphericalangle PBC = \alpha$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle CQB = \alpha + x$

Pero

$m\sphericalangle QBC = m\sphericalangle ACB = \alpha + x$ (ángulos alternos interiores)

Luego

$CQ = CB = \ell$

$m\sphericalangle BCQ = 28°$

Al trazar

$\overline{CM} \perp \overline{BQ}$ y

$\overline{QH} \perp \overline{AC}$

en el $\triangle BCQ$

$CM = 4(MB) = 4(MQ) = 4a$

$QH = CM = 4a$ y

$CH = MQ = a$

Entonces, en el ⊿ AQH

$QH = 4a$ y $AH = 3a$

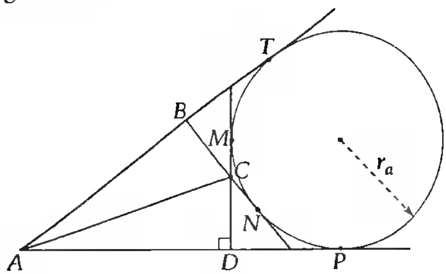
$\therefore$ $x = 53°$

Clave **E**

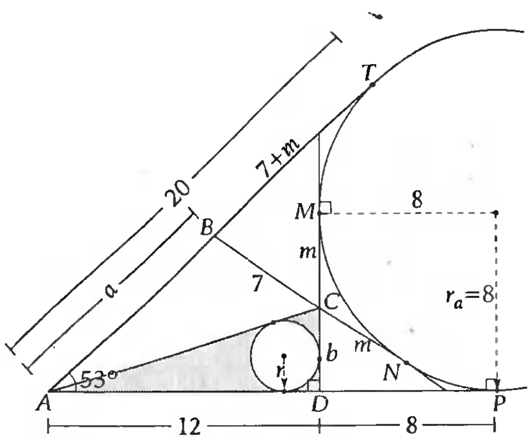
PROBLEMA N.° 16

En el gráfico mostrado, $AB+CD=15$; $BC=7$; $AT=20$ y $r_a=8$. Calcule el inradio del triángulo ACD, si M, N, P y T son puntos de tangencia.

A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 1,2
E) 3



Resolución



$a+b=15$

Como $CN=CM=m$

$BN=BT=7+m$

Luego

$a+7+m=20$ y $a+m=13$ (I)

Pero

$b+m=r_a=8$ (I)

De (I) + (II)

$\underbrace{a+b}_{15}+2m=21 \rightarrow m=3$

Luego

$a=10$, $b=5$

Entonces, en el $\triangle ACD$

$AC^2=5^2+12^2=13^2 \rightarrow AC=13$

Aplicando el teorema de Poncelet en el $\triangle ACD$

$12+b=AC+2r \rightarrow 12+5=13+2r$

$\therefore r=2$

Clave **C**

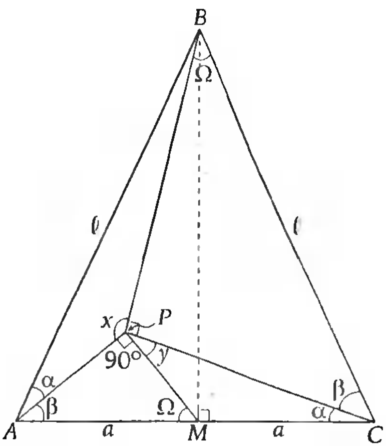
PROBLEMA N.° 17

En la base $\overline{AC}$ de un triángulo isósceles ABC y en la región interior al triángulo se ubican los puntos M y P, respectivamente. Si $m\measuredangle PAB=m\measuredangle PCA$, calcule la $m\measuredangle APB+m\measuredangle MPC$ cuando $AM=MC$ y $m\measuredangle BPC=90°$.

A) 100° B) 135° C) 150°
D) 180° E) 240°

Resolución

En el gráfico



Nos piden $m\measuredangle APB+m\measuredangle MPC=x+y$

Trazamos $\overline{BM}$

Como $AM=MC$ y $AB=BC$

$\rightarrow$ $m\measuredangle BMC=90°$

Tendremos que el cuadrilátero $MPBC$ es inscriptible.

Luego, $m\measuredangle AMP=m\measuredangle PBC=\Omega$

También

$m\measuredangle PAC=m\measuredangle PCB=\beta$ $(AB=BC)$

Pero en el $\triangle BPC$

$\beta+\Omega=90°$

Entonces, en el $\triangle APM$

$m\measuredangle APM=90°$

En P

$x+y+90+90°=360°$

$\therefore$ $x+y=180°$

Clave **D**

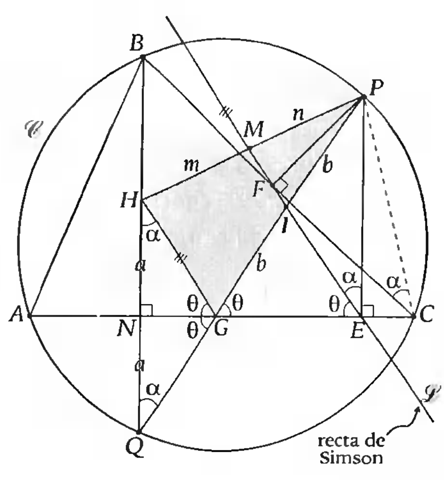
PROBLEMA N.° 18

La recta de Simson, correspondiente a un punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo de ortocentro H, interseca a $\overline{HP}$ en M. Calcule HM/MP.

A) 0,6 B) 0,7 C) 0,5
D) 2 E) 1

Resolución

Piden $\dfrac{HM}{MP}=\dfrac{m}{n}$.



Sea el $\triangle ABC$ de ortocentro H y $\mathscr{L}$ la respectiva recta de Simson correspondiente al punto P. Si se prolonga la altura $\overline{BN}$ hasta intersecar a $\mathscr{C}$

$\rightarrow$ $HN=NQ=a$

Al unir Q con P, entonces, $GQ=GH$.

Como m$\measuredangle PCF$=m$\measuredangle PEF=\alpha$ (cuadrilátero inscriptible $EFPC$).

También m$\measuredangle BQP$=m$\measuredangle BCP=\alpha$

En el $\triangle PEG$

$GI=IP=b$

Además

$\overline{EM}//\overline{GH}$

En el $\triangle PGH$

$\overline{IM}//\overline{GH}$ y $GI=IP$

$\rightarrow$ $HM=MP$

$\therefore$ $\dfrac{HM}{MP}=1$

Clave **E**

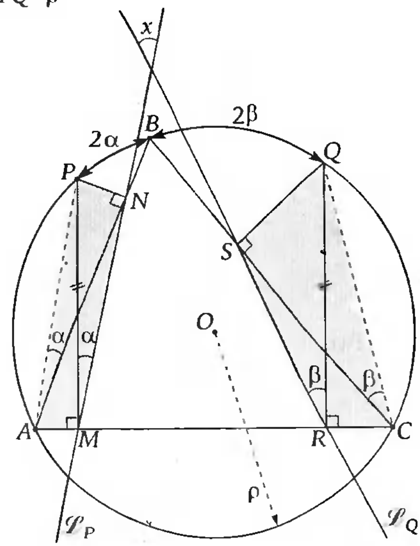
PROBLEMA N.° 19

Calcule la medida del ángulo formado por las rectas de Simson trazadas desde los puntos P y Q de la circunferencia circunscrita a un triángulo. Considere que PQ y el radio de dicha circunferencia presentan igual longitud.

A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 75°

Resolución

Si $PQ=\rho$



Sea $\mathscr{L}_P$ y $\mathscr{L}_Q$ las rectas de Simson relativas a los puntos P y Q, respectivamente.

Luego, en el cuadrilátero $AMNP$ inscriptible

m$\measuredangle PMN$=m$\measuredangle PAN=\alpha$

$\rightarrow$ $m\overset{\frown}{PB}=2\alpha$

Análogamente, en el cuadrilátero $CRSQ$ inscriptible

m$\measuredangle SRQ$=m$\measuredangle SCQ=\beta$

$\rightarrow$ $m\overset{\frown}{BQ}=2\beta$

Como $\overline{PM}//\overline{QR}$

$\rightarrow$ $x=\alpha+\beta$

También sabemos que si

$PQ=\rho$

$\rightarrow$ $m\overset{\frown}{PQ}=60°$

$2\alpha+2\beta=60°$

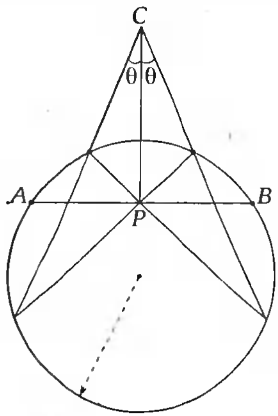
$\therefore$ $\alpha+\beta=x=30°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

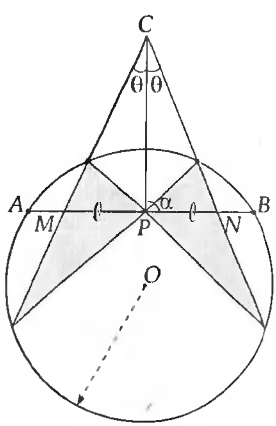
Según el gráfico, $AP=PB$. Indique $m\measuredangle CPB$.

A) 60°
B) 70°
C) 75°
D) 85°
E) 90°



Resolución

En el gráfico



Del dato: $AP=PB$

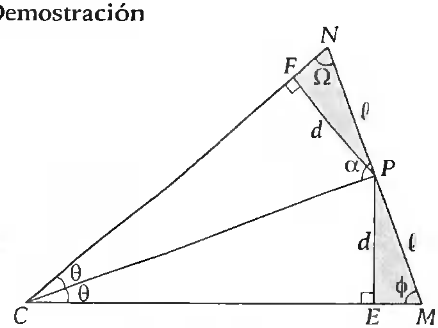
Nos piden el valor de α. Recordando el teorema de Papillón, si

$AP=PB$

$\rightarrow MP=PN$

Luego, en el $\triangle MCN$, la mediana CP es también bisectriz. Además, es altura y mediatriz.

Demostración



Trazamos $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ perpendiculares a $\overline{CM}$ y $\overline{CN}$, respectivamente. Del teorema de la bisectriz

$PE=PF=d$

Entonces, los triángulos PEM y PFN son congruentes $\Omega=\phi$

$\rightarrow \theta+\Omega=90°$

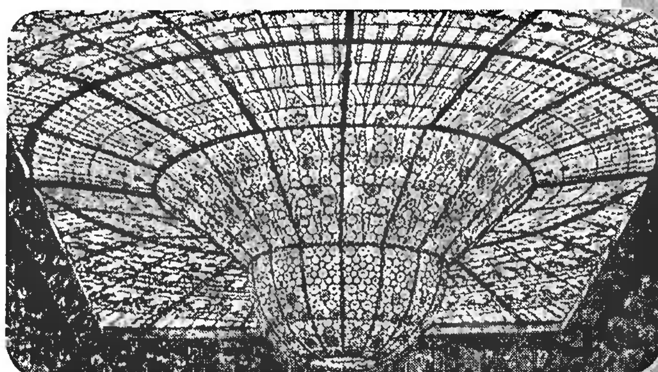
$\therefore \alpha=90°$

Clave **E**

Capítulo

10

Puntos notables



En un tema anterior se ha tratado el estudio de las líneas notables asociadas a un triángulo, ceviana, mediana, altura, bisectriz y mediatriz. En este capítulo realizaremos el estudio de la concurrencia de dichas líneas notables, asociadas a un triángulo, lo cual implica: nuevos teoremas asociados a un triángulo y otras figuras geométricas como la circunferencia, que también relacionarán colinealidades de ciertos puntos notables como ocurre en la recta de Euler, tema que estudiaremos.

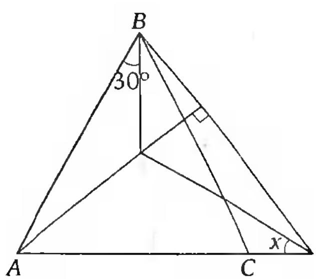
Los problemas desarrollados utilizan las propiedades del baricentro, incentro, excentro, ortocentro y circuncentro.

También se hará uso del punto de Brocard y de los triángulos asociados a los puntos notables, como el mediano, órtico, tangencial y ex incentral.

Puntos notables

PROBLEMA N.° 1

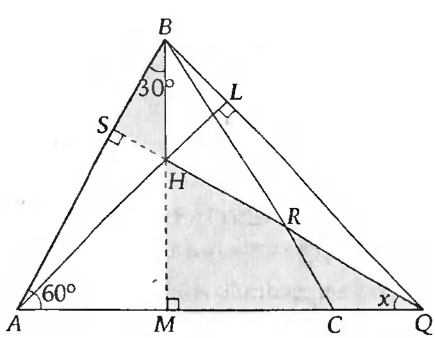
En el gráfico, ABC es equilátero. Calcule x.



A) 20° B) 30° C) 45°
D) 25° E) 37°

Resolución

Nos piden x.



Dato:

El triángulo ABC es equilátero.

Al prolongar $\overline{BH}$ hasta $M(M \in AC)$ notamos que $\overline{BM} \perp \overline{AC}$.

$\overline{AL}$ y $\overline{BM}$ son alturas del triángulo AQB, entonces H es ortocentro del ΔABQ.

Luego

$\overline{QS} \perp \overline{AB}$

En el ⊿ BSH

$m\sphericalangle SHB=60°$

En H

$m\sphericalangle MHQ=m\sphericalangle SHB=60°$

En el ⊿ MHQ

$x+m\sphericalangle MHQ=90°$

$\therefore\ x=30°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

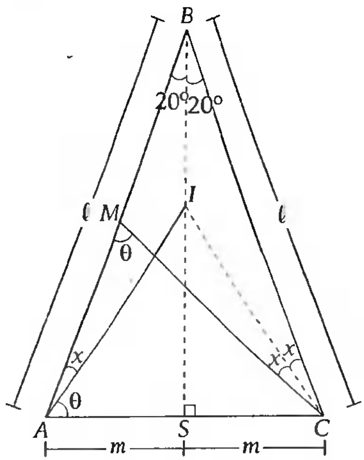
En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la ceviana interior CM, luego se ubica el incentro I en el triángulo MCB.

Si $m\sphericalangle AMC=m\sphericalangle IAC$, $m\sphericalangle ABC=40°$, calcule $m\sphericalangle BAI$.

A) 20° B) 40° C) 10°
D) 50° E) 30°

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle BAI=x$.



Datos:

$m\sphericalangle AMC=m\sphericalangle IAC$; $m\sphericalangle ABC=40°$

I es el incentro del $\triangle ABC$.

Se prolonga BI hasta $S(S\in\overline{AC})$

$BA=BC$ y $m\sphericalangle IBA=m\sphericalangle IBC$

$\triangle ABI\cong\triangle CBI$ (L. A. L.), entonces

$m\sphericalangle ICB=m\sphericalangle IAB=x$

⊾ASB: $x+\theta+20°=90°$

$\rightarrow\ x+\theta=70°$ (I)

$\triangle MBC$: $m\sphericalangle ICM=m\sphericalangle ICB=x$

$\theta=40°+2x$ (II)

De (II) en (I)

$x+(40°+2x)=70°$

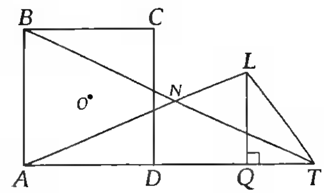
$3x=30°$

$\therefore\ x=10°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

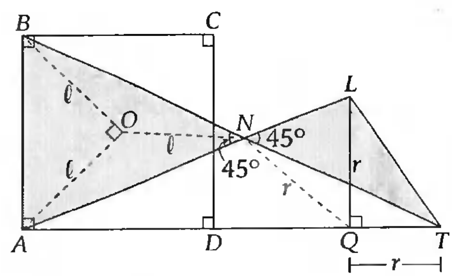
Del gráfico, Q es circuncentro del triángulo NLT. Indique qué punto notable es el centro O del cuadrado $ABCD$ para el triángulo BNA.



A) baricentro
B) ortocentro
C) circuncentro
D) excentro
E) incentro

Resolución

Nos piden indicar qué punto notable es O para el triángulo BNA.



Dato:

Q es el circuncentro del $\triangle NLT$.

Luego

$QN=LQ=QT=r$

Además

$m\sphericalangle LQT=2(m\sphericalangle LNT)=90°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle LNT=45°=m\sphericalangle ANB$

O: centro del cuadrado $ABCD$

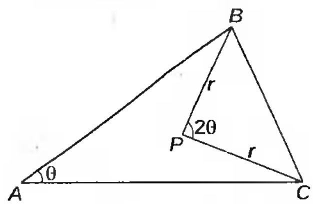
$\rightarrow\ AO=BO=\ell$ y $m\sphericalangle AOB=90°$

Nota

Del gráfico:

Si $PB=PC$ y $m\sphericalangle BPC=2(m\sphericalangle BAC)$

P: circuncentro del $\triangle ABC$.



En el problema:

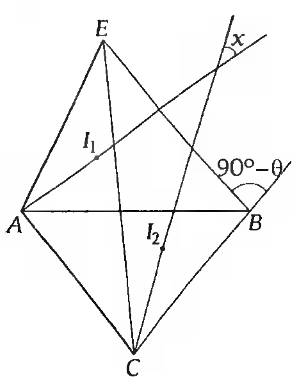
$AO=OB$ y $m\sphericalangle AOB=2(m\sphericalangle ANB)$

Por lo tanto, O será el circuncentro del $\triangle BNA$.

Clave C

PROBLEMA N.° 4

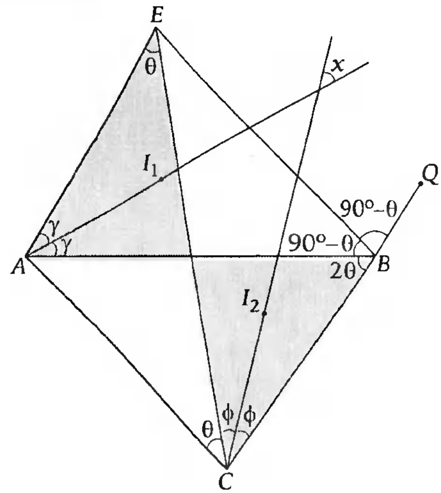
En el gráfico, E es excentro del triángulo ABC, I_1 y I_2 son incentros de los triángulos EAB y ECB, respectivamente. Calcule x, si $m\sphericalangle ACE=\theta$.



A) $\theta/2$ B) 2θ C) $3\theta/2$
D) $5\theta/2$ E) 3θ

Resolución

Nos piden x.



Datos:

E: excentro del $\triangle ABC$

I_1, I_2: incentros del $\triangle EAB$ y $\triangle ECB$

$m\sphericalangle ACE=\theta$

Del gráfico:

$m\sphericalangle ABE=m\sphericalangle EBQ=90°-\theta$

Entonces

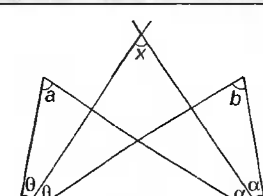
$m\sphericalangle ABC=2\theta$

En el $\triangle ABC$, por propiedad del excentro

$m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle AEC)=2\theta$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle AEC=\theta$

Nota



$$x=\frac{a+b}{2}$$

Por teorema

$$x=\frac{m\measuredangle AEC+m\measuredangle ABC}{2}$$

Reemplazamos

$$x=\frac{\theta+2\theta}{2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{3\theta}{2}$$

Clave **C**

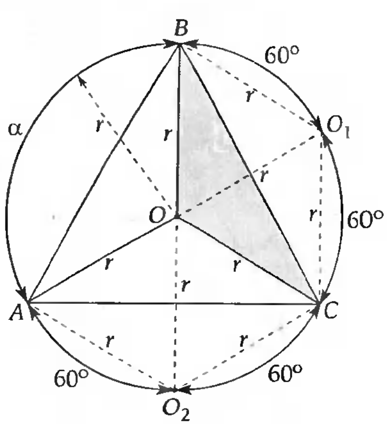
PROBLEMA N.° 5

En un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia de centro O, se ubican los circuncentros O_1 y O_2 de los triángulos BOC y AOC, los cuales pertenecen a los arcos BC y AC, respectivamente. Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.

A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 150°

Resolución

Nos piden la $m\overset{\frown}{AB}=\alpha$.



O_1: circuncentro del $\triangle BOC$

$\rightarrow\ O_1O=O_1B=O_1C=r$

Luego

$m\overset{\frown}{BO_1}=m\overset{\frown}{O_1C}=60°$

O_2: circuncentro del $\triangle AOC$

$\rightarrow\ O_2A=O_2O=O_2C=r$

De ello

$m\overset{\frown}{AO_2}=m\overset{\frown}{O_2C}=60°$

$m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BC}+m\overset{\frown}{AC}=360°$

$\alpha+120°+120°=360°$

$\therefore\ \alpha=120°$

Clave **D**

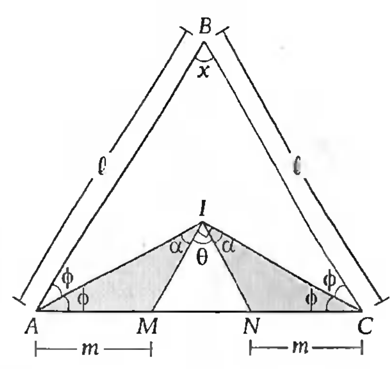
PROBLEMA N.° 6

En un triángulo ABC, $(AB=BC)$, se ubica el incentro I, luego se ubican los puntos M, N en $\overline{AC}$, tal que $m\measuredangle MIC=90°$, $AM=NC$ y $m\measuredangle MIN=\theta$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) $90°-\theta$ B) $90°-2\theta$ C) $180°-\theta$
D) $45°+2\theta$ E) $180°-2\theta$

Resolución

Nos piden la $m\measuredangle ABC=x$.



I: incentro del $\triangle ABC$

Por dato:

$AB=BC$ y $AM=NC$

Luego

$AI=IC$

Además

$\triangle AIM \cong \triangle CIN$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ $m\measuredangle AIM = m\measuredangle NIC = \alpha$

Por teorema

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$90° + \alpha = 90° + \frac{x}{2}$$

$\rightarrow$ $x = 2\alpha$ (I)

Pero

$\alpha + \theta = 90°$

$\rightarrow$ $\alpha = 90° - \theta$ (II)

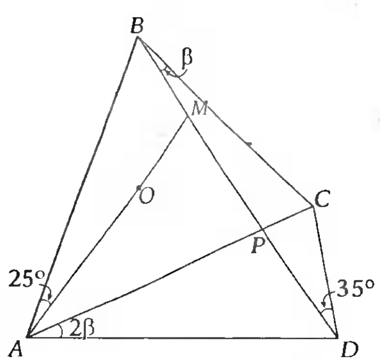
De (II) en (I)

$\therefore$ $x = 180° - 2\theta$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

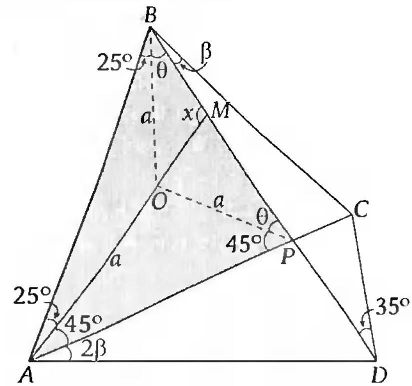
En el gráfico, O es circuncentro del triángulo ABP y $AC=AD$, calcule $m\measuredangle BMA$.



A) 125° B) 130° C) 110°
D) 135° E) 140°

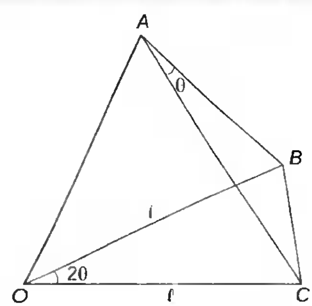
Resolución

Nos piden la $m\measuredangle BMA = x$.



Datos: $AC=AD$ y $m\measuredangle CAD = 2(m\measuredangle DBC) = 2\beta$

Nota



Se cumple si O es circuncentro del $\triangle ABC$.

Luego, en el problema:

$AB=AC$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BDC) = 70°$

O: circuncentro del $\triangle ABP$, entonces

$AO=OB=OP=a$; $m\measuredangle APO = m\measuredangle OAP = 45°$

$\triangle AMP$: $x = 90° + \theta$ (I)

$\triangle ABP$: $70° + (25° + \theta) + (45° + \theta) = 180°$

$\rightarrow$ $\theta = 20°$ (II)

De (II) en (I): $x = 90° + 20°$

$\therefore$ $x = 110°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

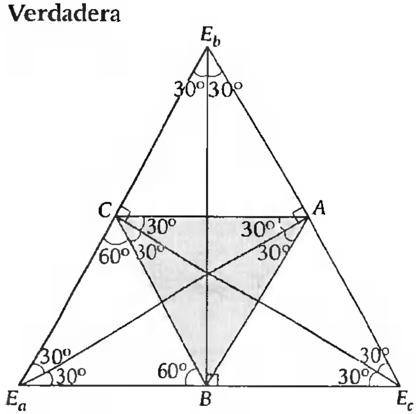
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un triángulo exincentral es equilátero solo si su respectivo triángulo órtico es equilátero.
II. En un triángulo, los puntos medios de los lados y los vértices de su respectivo triángulo órtico son concíclicos.
III. Dado un triángulo y su triángulo órtico, aquel es el triángulo exincentral de dicho triángulo órtico.

A) FFV B) VFV C) VVF
D) VFF E) FVF

Resolución

I. Verdadera



$\triangle E_aE_bE_c$: triángulo exincentral del triángulo ABC

$\triangle ABC$: triángulo órtico del triángulo $E_aE_bE_c$

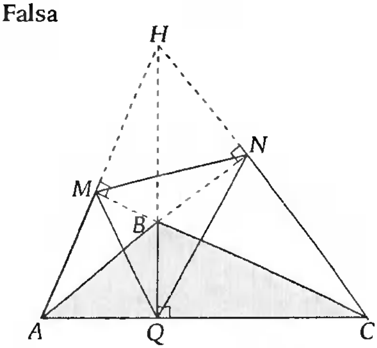
Si $\triangle E_aE_bE_c$ es equilátero

$\rightarrow$ $\triangle ABC$ es equilátero.

II. Verdadera

En todo triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que tienen por extremos el ortocentro y un vértice, pertenecen a una misma circunferencia (circunferencia de los nueve puntos) donde los pies de las alturas son vértices del triángulo órtico.

III. Falsa



$\triangle ABC$: triángulo obtusángulo

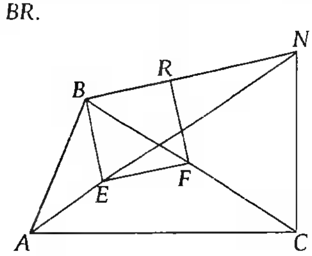
$\triangle MNQ$: triángulo órtico del $\triangle ABC$

El $\triangle ABC$ no es el triángulo exincentral del $\triangle MNQ$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

Según el gráfico, E es incentro del triángulo ABC, $BRFE$ es un cuadrado, $RN=a$ y $NC=b$, Calcule BR.



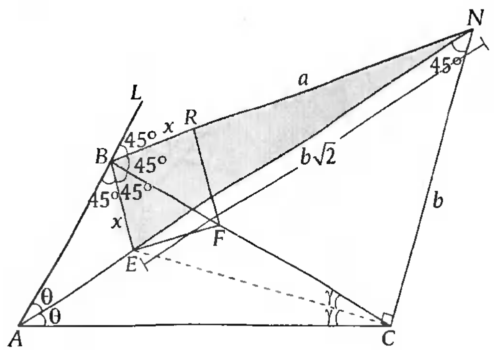
A) a^2+b^2 B) $-a^2+\sqrt{2b^2}$

C) $\dfrac{(a^2+b^2)}{2}$

D) $\dfrac{\left(-a+\sqrt{4b^2-a^2}\right)}{2}$ E) a^2-b^2

Resolución

Nos piden $BR=x$.



E: incentro del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ $m\measuredangle NAB = m\measuredangle NAC = \theta$ y

$m\measuredangle LBN = m\measuredangle NBC = 45°$

N: excentro del $\triangle ABC$

$m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle ANC) = 90°$

$\rightarrow$ $m\measuredangle ANC = 45°$

Notamos que $EBNC$ es un cuadrilátero inscriptible, entonces

$m\measuredangle ECN = 90°$

$⊿ECN$: $NC=b$

$\rightarrow$ $EN = b\sqrt{2}$

$⊿EBN$: $x^2+(x+a)^2=(b\sqrt{2})^2$

$2x^2+2xa+(a^2-2b^2)=0$

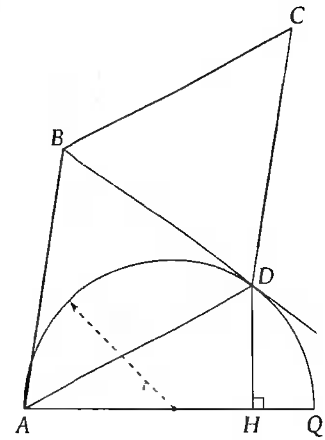
Reemplazamos datos en la ecuación general

$$\therefore \quad x=\frac{-a+\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Según el gráfico, $ABCD$ es un rombo; $HQ=8$ y D es punto de tangencia, calcule la distancia entre los ortocentros de los triángulos BCD y ABD.

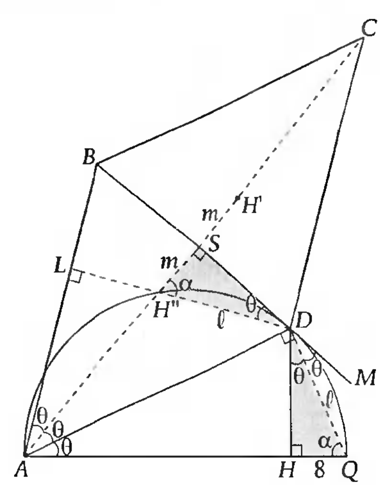


A) 8 B) 12 C) 16

D) 20 E) 24

Resolución

Piden la distancia entre los ortocentros de los triángulos BCD y ABD.



Por dato, ABC es rombo, entonces

$m\measuredangle BAC=m\measuredangle DAC$ y $\overline{BD}\perp\overline{AC}$

D: punto de tangencia

$\rightarrow$ $m\measuredangle MDQ=m\measuredangle QAD=\theta$

$⊿DHQ$: $\alpha+\theta=90°$

$\square AH''DQ$: inscrito en una semicircunferencia

$\rightarrow$ $m\measuredangle SHD=m\measuredangle DQH=\alpha$

$m\measuredangle ALD=m\measuredangle ASD=90°$

H'': ortocentro del $\triangle ABD$

$\triangle BCD\cong\triangle BAD$ y $H''S=SH'=m$

Entonces, H': ortocentro del $\triangle BCD$

$m\widehat{H''D}=m\widehat{DQ}=2\theta$ $\rightarrow$ $H''D=DQ=\ell$

$⊿H''SD\cong ⊿QHD$(A. L. A.)

$\rightarrow$ $m=8$

$\therefore$ $H''H'=16$

Clave **C**

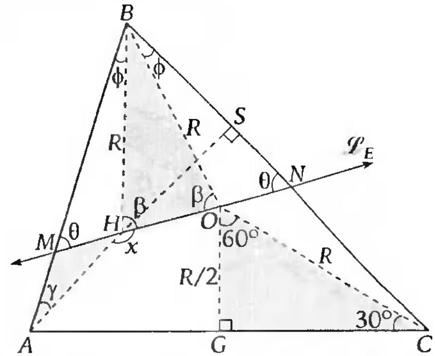
PROBLEMA N.° 11

En un triángulo ABC acutángulo ($BC>AB$), la recta de Euler interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N, respectivamente, tal que $BM=BN$. Si H y O son el ortocentro y el circuncentro, respectivamente, calcule $m\measuredangle AHO$.

A) 110°
B) 120°
C) 140°
D) 150°
E) 160°

Resolución

Nos piden la $m\measuredangle AHO=x$.



Sean H y O: ortocentro y circuncentro del $\triangle ABC$, entonces

$m\measuredangle ABH=m\measuredangle OBC=\phi$

Dato:

$BM=BN$ $\rightarrow$ $m\measuredangle BMN=m\measuredangle BNM=\theta$

$\triangle HBO$: $HB=BO=R$

Por teorema

$HB=2(OG)$ $\rightarrow$ $OG=\dfrac{R}{2}$

$OC=2(OG)$ $\rightarrow$ $m\measuredangle GOC=60°$

Por teorema

$m\measuredangle ABC=m\measuredangle GOC$

Entonces, $m\measuredangle MBN=60°$.

Luego

$\theta=60°$ (I)

$m\measuredangle ABS=60°$ $\rightarrow$ $\gamma=30°$ (II)

En el $\triangle AMH$

$x+\theta=\gamma+180°$ (III)

Reemplazamos (I) y (II) en (III)

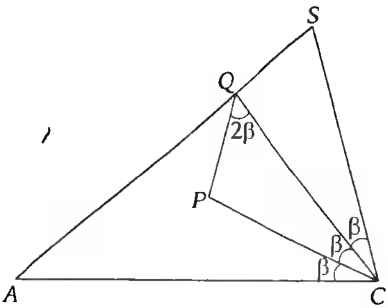
$x+60°=30°+180°$

$\therefore$ $x=150°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

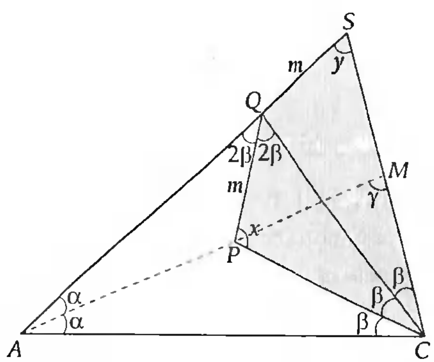
En el gráfico, $PQ=QS$ y $m\sphericalangle QSC \neq m\sphericalangle QPC$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AP}$ y $\overline{SC}$.



A) 78° B) 90° C) 105°
D) 110° E) 120°

Resolución

Piden γ, que es la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y $\overline{SC}$.



Por dato:

$PQ=QS;\ x \neq y$

Del gráfico:

$m\sphericalangle PCQ=m\sphericalangle QCS=\beta$

Entonces

$\square PQSC$: inscriptible

$m\sphericalangle PQA=m\sphericalangle PCS=2\beta$

P: incentro del $\triangle AQC$

$m\sphericalangle QAP=m\sphericalangle PAC=\alpha$

En el $\triangle AMC$

$\gamma+\alpha+3\beta=180°$ (I)

En el $\triangle AQC$

$2\alpha+6\beta=180°$

$\alpha+3\beta=90°$ (II)

De (I) – (II)

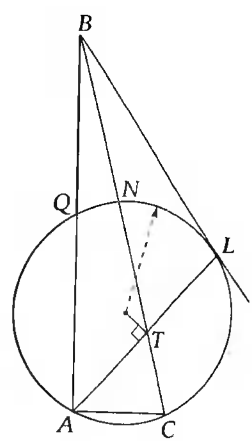
$\gamma=180°-90°$

$\therefore\ \gamma=90°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 13

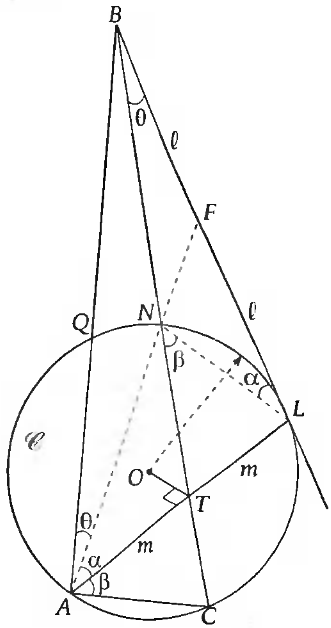
En el gráfico, $BN=2(NT)$ y L es punto de tangencia. Calcule $\dfrac{m\overset{\frown}{LQ}}{m\sphericalangle LAC}$.



A) 1 B) 3/2 C) 2
D) 5/3 E) 3

Resolución

Nos piden $\dfrac{m\widehat{LQ}}{m\sphericalangle LAC}$.



Por dato:

$\overline{OT} \perp \overline{AL}$

O: centro de $\mathscr{C}$

Luego

$AT=TL=m$

Además, se sabe que

$BN=2(NT)$

entonces N es baricentro del $\triangle ABL$.

Luego

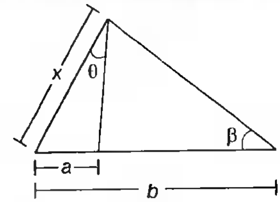
$FB=FL=\ell$

$m\sphericalangle FLN=m\sphericalangle LAF=\alpha$

$\rightarrow \quad \ell^2=(FN)(FA)$

$(BF)^2=(FN)(FA)$

Nota



Si $x^2=ab$ entonces $\theta=\beta$

$m\sphericalangle BAF=m\sphericalangle NBF=\theta$

En el $\triangle NBL$

$\beta=\alpha+\theta \qquad$ (I)

$\beta=m\sphericalangle LAC \qquad$ (II)

$\alpha+\theta=\dfrac{m\widehat{QL}}{2} \qquad$ (III)

De (II) y (III) en (I)

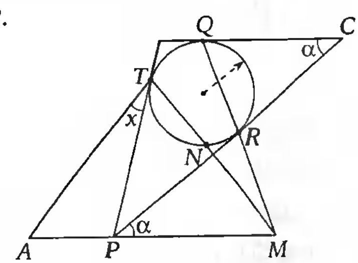
$$m\sphericalangle LAC=\frac{m\widehat{QL}}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{m\widehat{LQ}}{m\sphericalangle LAC}=2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

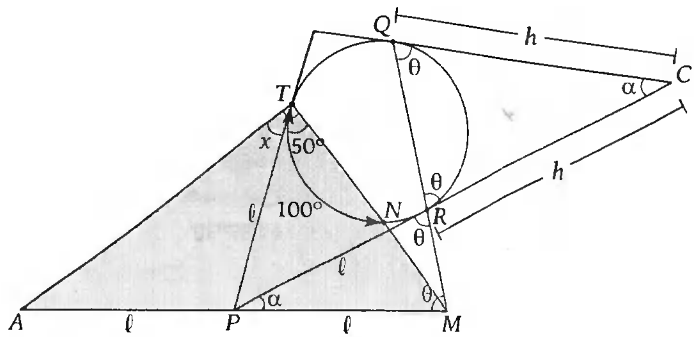
En el gráfico, T, R y Q son puntos de tangencia, y el circuncentro del triángulo TRM es el circuncentro del triángulo ATM. Calcule x, si $m\widehat{TN}=100°$.



A) 30°
B) 40°
C) 35°
D) 45°
E) 60°

Resolución

Nos piden x.



Por dato:

T, R y Q son puntos de tangencia

$\rightarrow$ $PT=PR$ y $CQ=CR$

$m\measuredangle PRM=m\measuredangle PMR=\theta$

$\rightarrow$ $PR=PM=\ell$

$PT=PR=PM$

$\rightarrow$ P: circuncentro del $\triangle TRM$

Luego

P: circuncentro del $\triangle ATM$

$PA=PT=PM$

$\rightarrow$ $m\measuredangle ATM=90°$

Por teorema del ángulo semiinscrito

$$m\measuredangle PTM=\frac{m\overset{\frown}{TN}}{2}$$

Por dato:

$m\overset{\frown}{TN}=100°$

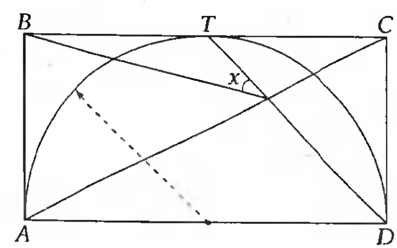
$\rightarrow$ $m\measuredangle PTM=50°$

$\therefore$ $x=40°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

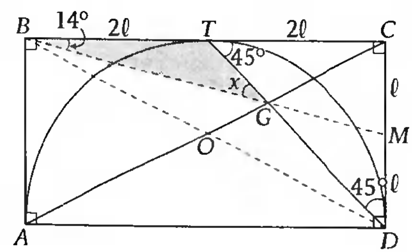
En el gráfico, $ABCD$ es un rectángulo. Si T es punto de tangencia, calcule x.



A) 37° B) 53° C) 60°
D) 30° E) 31°

Resolución

Nos piden x.



Del gráfico:

$BO = OD$

Además

$BT = TC$

$\rightarrow$ G: baricentro del $\triangle BCD$

Luego, $\overline{BM}$ será una mediana del $\triangle BCD$

Si $MC = MD = \ell$ $\rightarrow$ $BC = 4\ell$

⊿BCM: notable de 14° y 76°

$\rightarrow$ $m\sphericalangle MBC = 14°$

$\triangle BTG$: $x + 14° = 45°$

$\therefore$ $x = 31°$

Clave **E**

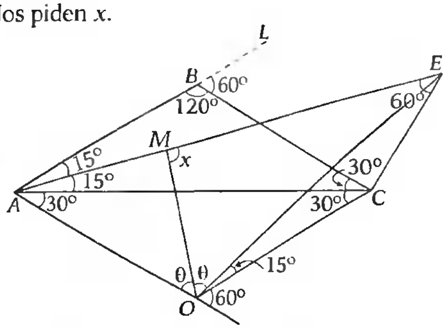
PROBLEMA N.° 16

En un triángulo ABC, $AB = BC$, $m\sphericalangle ABC = 120°$, se ubica el excentro E relativo a $\overline{BC}$, luego se ubica el circuncentro O de dicho triángulo. Calcule la medida del ángulo que determina $\overline{AE}$ y la bisectriz del ángulo AOE.

A) 75° B) 75°30' C) 105°
D) 97°30' E) 107°

Resolución

Nos piden x.



Por dato: $AB = BC$; $m\sphericalangle ABC = 120°$

O: circuncentro del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle AOC = 2(m\sphericalangle LBC) = 120°$

E: excentro del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle AEC = \dfrac{m\sphericalangle ABC}{2} = 60°$

⏢$AECO$: inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle EOC = m\sphericalangle EAC = 15°$

$m\sphericalangle AOC = 120°$ $\rightarrow$ $2\theta + 15° = 120°$

Luego

$\theta = 52°30'$

$\triangle AOM$: $x = 45° + \theta$

$\therefore$ $x = 97°30'$

Clave **D**

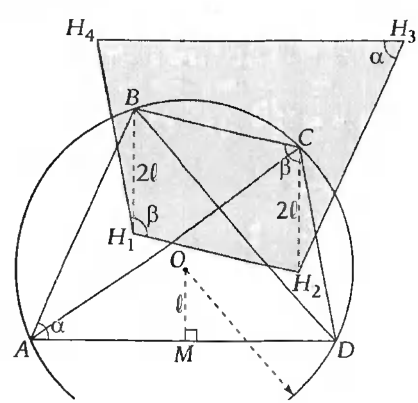
PROBLEMA N.° 17

En un cuadrilátero $ABCD$, inscrito en una circunferencia, se ubican los ortocentros H_4, H_3, H_2 y H_1 de los triángulos ABC, BCD, CDA y ABD. Indique qué tipo de cuadrilátero es $H_1H_2H_3H_4$.

A) bicentro B) inscrito
C) inscriptible
D) trapezoide simétrico E) trapecio

Resolución

Piden determinar qué tipo de cuadrilátero es el ⏢$H_1H_2H_3H_4$



H_1, H_2, H_3 y H_4: ortocentros de los triángulos ABD, ACD, BCD y ABC, respectivamente.

Sea $OM=\ell$, por teorema:

$\triangle ABD$: $BH_1=2(OM)=2\ell$

$\triangle ACD$: $CH_2=2(OM)=2\ell$

$BH_1=CH_2$ y $\overline{BH_1}//\overline{CH_2}$

Luego, $\overline{H_1H_2}//\overline{BC}$

De igual modo

$\overline{H_2H_3}//\overline{AB}$, $\overline{H_3H_4}//\overline{AD}$ y $\overline{H_4H_1}//\overline{CD}$

$\rightarrow$ $m\measuredangle H_2H_3H_4=m\measuredangle BAD=\alpha$ y

$m\measuredangle H_4H_1H_2=m\measuredangle BCD=\beta$

$\square ABCD$: $\alpha+\beta=180°$

Por lo tanto, el $\square H_1H_2H_3H_4$ será inscriptible.

Clave **C**

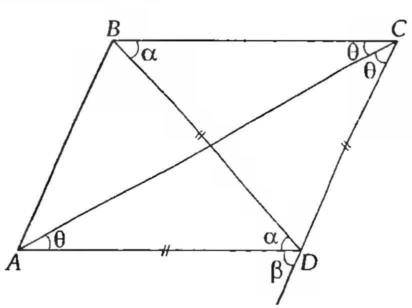
PROBLEMA N.° 18

En un trapecio $ABCD(\overline{AD}//\overline{BC})$, D es el circuncentro del triángulo ABC. ¿Qué punto notable es A del triángulo CBD?

A) incentro B) ortocentro
C) circuncentro
D) baricentro E) excentro

Resolución

Nos piden determinar qué punto notable es A del triángulo CBD.



Por dato, D es el circuncentro del triángulo ABC.

$\rightarrow$ $DA=DB=DC$

$\triangle BDC$: isósceles $\rightarrow$ $\alpha=2\theta$

Por teorema del ángulo exterior en el triángulo ACD

$\beta=2\theta$ $\rightarrow$ $\alpha=\beta$

Por lo tanto, A será uno de los excentros del triángulo CBD.

Clave **E**

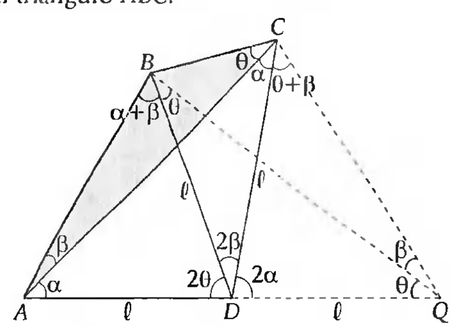
PROBLEMA N.° 19

En un cuadrilátero $ABCD$, si $m\measuredangle BDC=2(m\measuredangle BAC)$ y $m\measuredangle BDA=2(m\measuredangle BCA)$, ¿qué punto notable es D para el triángulo ABC?

A) incentro B) excentro
C) circuncentro
D) baricentro E) ortocentro

Resolución

Piden reconocer qué punto notable es D para el triángulo ABC.



A partir de los datos tendremos:

$m\measuredangle BDA=2(m\measuredangle BCA)=2\theta$

$m\measuredangle BDC=2(m\measuredangle BAC)=2\beta$

Se prolonga $\overline{AD}$ hasta Q, de manera que

$m\measuredangle BQD=\theta$

Entonces, $m\measuredangle ACB=m\measuredangle AQB=\theta$

$\square ABCQ$: inscriptible

Luego, m∢BQC=m∢$BAC=\beta$
$\triangle BDQ$: $BD=DQ=\ell$
$\triangle DCQ$: $CD=QD=\ell$
Sea
m∢$ACD=\alpha$
$\rightarrow$ m∢ABQ=m∢$ACQ=\alpha+\theta+\beta$
Luego
m∢ABD=m∢$BAD=\alpha+\beta$
$\rightarrow$ $AD=DB=CD=\ell$
Por lo tanto, D será el circuncentro del triángulo ABC.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

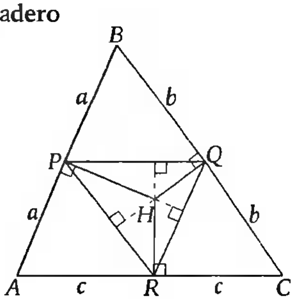
De las siguientes proposiciones, indique el valor de verdad.

I. Todo triángulo mediano es un triángulo pedal.
II. El incentro de todo triángulo órtico es el ortocentro de su triángulo antiórtico.
III. El incentro del triángulo exincentral es ortocentro del triángulo antiincentral.
IV. Un triángulo tangencial puede ser rectángulo.
V. Todo triángulo pedal es órtico.

A) VFFFF B) VVFVV C) VFVVV
D) VFFVF E) FVVVF

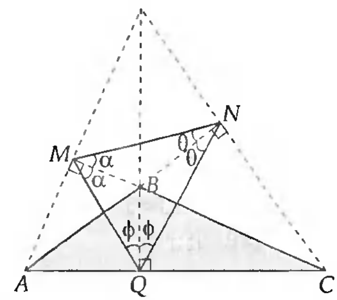
Resolución

I. Verdadero



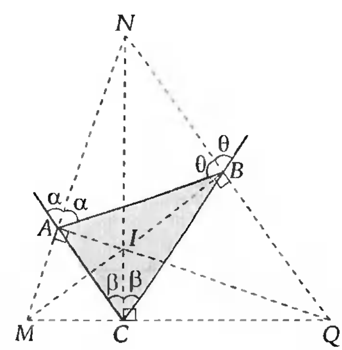
H: circuncentro del $\triangle ABC$
H: ortocentro del $\triangle PQR$
Por lo tanto, el $\triangle PQR$ será un triángulo pedal del $\triangle ABC$.

II. Falso



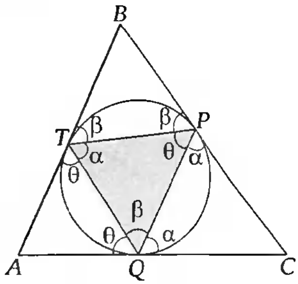
$\triangle MNQ$: triángulo órtico del $\triangle ABC$
$\triangle ABC$: triángulo antiórtico del $\triangle MNQ$
B es el incentro del $\triangle MNQ$, pero no es el ortocentro del $\triangle ABC$.

III. Falso



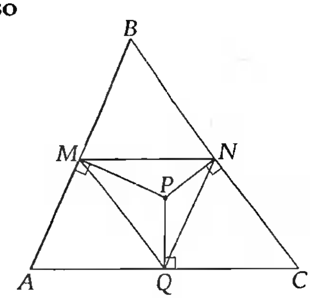
$\triangle MNQ$: triángulo exincentral del $\triangle ABC$
$\triangle ABC$: triángulo antiincentral del $\triangle MNQ$
El ortocentro del $\triangle MNQ$ es el incentro del $\triangle ABC$.

IV. Falso



$\triangle TPQ$: triángulo tangencial del $\triangle ABC$
Notamos: $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$ y $\theta < 90°$
Entonces, el triángulo tangencial siempre será acutángulo.

V. Falso



$\triangle MNQ$: triángulo pedal del $\triangle ABC$
El $\triangle MNQ$ será órtico solo cuando P sea el ortocentro del $\triangle ABC$.
Por lo tanto, no todo triángulo pedal será órtico.

Clave **A**

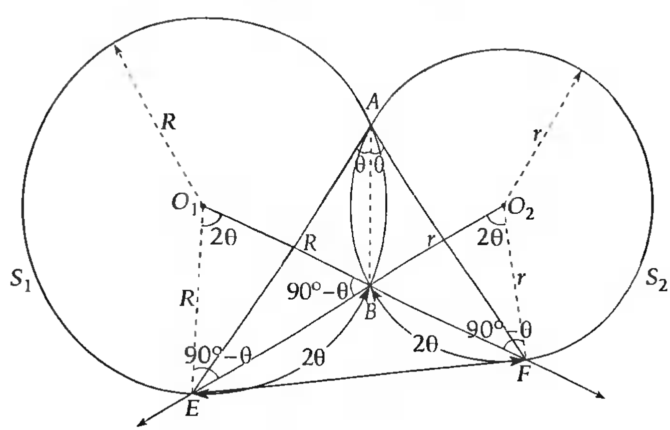
PROBLEMA N.° 21

Las circunferencias S_1 y S_2 de centros O_1 y O_2, respectivamente, se intersecan en A y B; el rayo O_1B interseca a S_2 en F y el rayo O_2B interseca a S_1 en E. ¿Qué punto notable es B del triángulo EAF?

A) ortocentro B) baricentro C) incentro D) circuncentro E) punto de Brocard

Resolución

Piden determinar qué punto notable es B para el triángulo EAF.



Sea

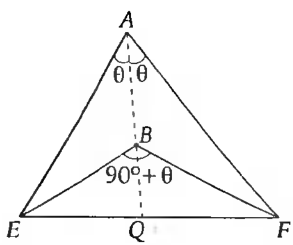
$m\sphericalangle EO_1B=2\theta;\ O_1E=O_1B=R$

$m\sphericalangle EBO_1=90°-\theta \ \rightarrow \ m\sphericalangle BFO_2=90°-\theta$

Por teorema del ángulo inscrito

$$m\sphericalangle EAB=m\sphericalangle FAB=\frac{m\overset{\frown}{BF}}{2}=\theta$$

Luego, del gráfico tendremos



$\overline{AQ}$: bisectriz interior

Además

$$m\sphericalangle EBF=90°+\frac{m\sphericalangle EAF}{2}$$

Por lo tanto, B será el incentro del triángulo EAF.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

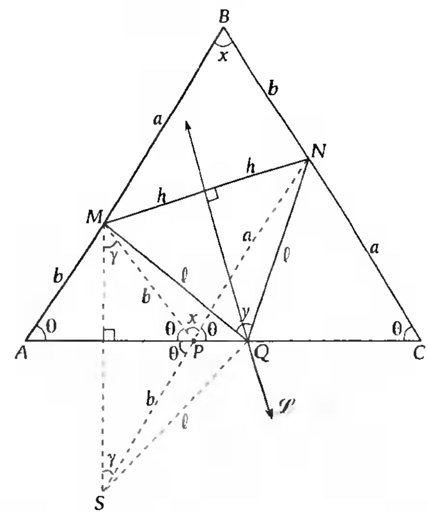
En un triángulo isósceles ABC, $(AB=BC)$, en los lados AB y BC se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $AM=BN$. Si la mediatriz de $\overline{MN}$ interseca a $\overline{CA}$ en Q, calcule $\dfrac{m\sphericalangle ABC}{m\sphericalangle MQN}$.

A) 2 B) 1/2 C) 3

D) 4 E) 1

Resolución

Nos piden $\dfrac{m\sphericalangle ABC}{m\sphericalangle MQN}=\dfrac{x}{y}$.



Se ubica P en $\overline{AC}$ tal que $m\sphericalangle MPA=m\sphericalangle MAP=\theta$

Por dato:

$AB=BC \ \rightarrow \ m\sphericalangle ACB=\theta$

$AM=BN;\ \overline{MP}//\overline{BN}$ y $MP=BN=b$

▱$MBNP$: paralelogramo

Entonces

$NP=MB=a$

Se prolonga $\overline{NP}$ hasta S de manera que $\overline{MS}\perp\overline{AP}$

Notamos

$PM=PS=b$ y $QM=QS=\ell$

Q: circuncentro del $\triangle SMN$

$\rightarrow \ m\sphericalangle MQN=2(m\sphericalangle MSN)$

$y=2\gamma$ (I)

En el $\triangle SMP$

$x=2\gamma$ (II)

Dividimos (I) entre (II)

$\therefore \ \dfrac{x}{y}=1$

Clave **E**

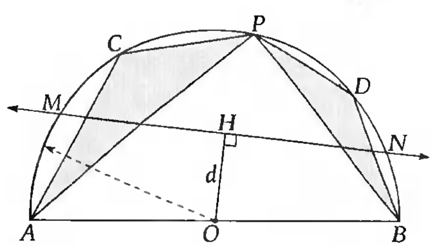
PROBLEMA N.° 23

Sean C y D dos puntos de una semicircunferencia de diámetro AB, tal que B y C están en semiplanos distintos respecto a la recta AD. Sean M, N y P los puntos de $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{DB}$ y $\overset{\frown}{CD}$, respectivamente. Si la distancia del circuncentro del triángulo ACP a la recta MN es 10 cm, calcule la distancia del circuncentro del triángulo BDP a la recta MN.

A) 5 cm
B) $5\sqrt{2}$ cm
C) $5\sqrt{3}$ cm
D) 10 cm
E) 20 cm

Resolución

Nos piden d (distancia del circuncentro del triángulo BDP a la recta MN).



Por dato: la distancia del circuncentro del $\triangle ACP$ a MN es 10 cm.

O: circuncentro del $\triangle ACP$

$\rightarrow$ $OH=10$ cm

O: circuncentro del $\triangle PDB$

$\rightarrow$ $OH=d$

$\therefore$ $d=10$ cm

Clave **D**

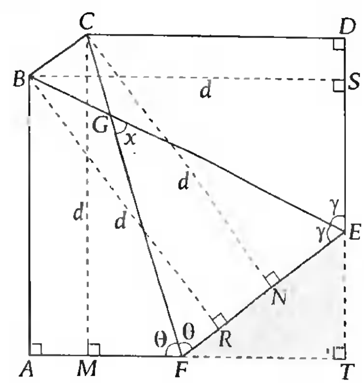
PROBLEMA N.° 24

En un hexágono convexo $ABCDEF$, los lados opuestos son paralelos y $m\measuredangle BAF=m\measuredangle CDE=90°$. Si las distancias entre $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AF}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ son respectivamente iguales a d, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.

A) 60°
B) 30°
C) 36°
D) 72°
E) 45°

Resolución

Nos piden α, que es la medida del ángulo entre $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.



Por dato, en el hexágono $ABCDEF$ los lados opuestos son paralelos y la distancia entre ellos es igual a d.

$CM=CN=d$ $\rightarrow$ $m\measuredangle MFC=m\measuredangle NFC=\theta$

$BS=BR=d$ $\rightarrow$ $m\measuredangle BER=m\measuredangle BES=\gamma$

$\rightarrow$ G: excentro del $\triangle ETF$

$$x=90°-\frac{m\measuredangle FTE}{2};\ m\measuredangle FTE=90°$$

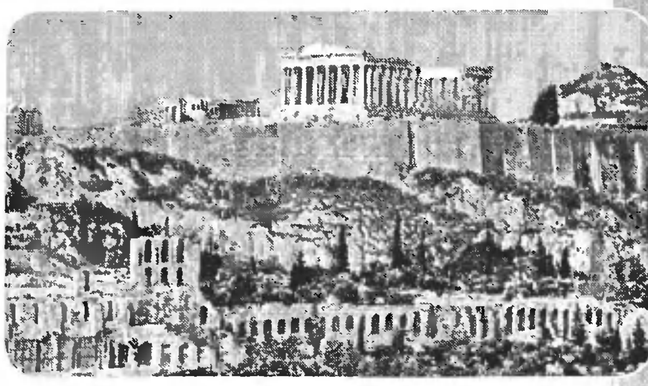
$\therefore$ $x=45°$

Clave **E**

Capítulo

11

Proporcionalidad de segmentos



En esta parte emplearemos el teorema de Tales y sus corolarios; también el teorema de la bisectriz (interior y exterior); el teorema del incentro y excentro; los teoremas de Menelao y Ceva, y el concepto de división áurea y armónica de un segmento.

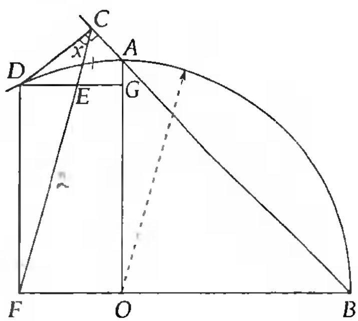
En los capítulos anteriores hemos conocido las diversas figuras geométricas, así como una serie de propiedades y relaciones.

Aquí estudiaremos una nueva forma de aplicar nuestros conocimientos a través de una comparación entre longitud de segmentos que se determinan en dos rectas, (secantes a tres o más rectas paralelas); esta relación es conocida como el teorema de Tales, quien fue uno de los siete sabios de Grecia.

Proporcionalidad de segmentos

PROBLEMA N.° 1

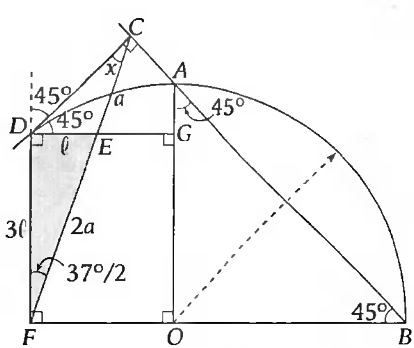
En el gráfico, $DGOF$ es un rectángulo. Si $EF=2(EC)$, calcule x.



A) $53°/2$ B) $37°/2$ C) $37°$
D) $14°$ E) $30°$

Resolución

Piden x.



Dato: $EF=2(EC)$

$m\sphericalangle OAB=m\sphericalangle CDG=45°$

$\overline{DC}$: bisectriz exterior en el ⊾ FDE

Por teorema de la bisectriz exterior

$$\frac{FD}{DE}=\frac{FC}{EC}=\frac{3a}{a}=3$$

⊾ FDE: notable de $\frac{37°}{2}$; $m\sphericalangle EFD=\frac{37°}{2}$

$\triangle FDC$: $x+\frac{37°}{2}=45°$

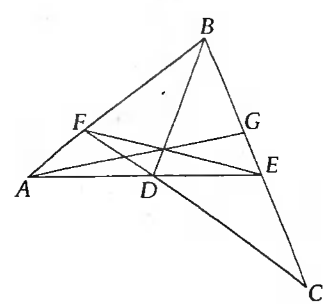
$\therefore\ x=\frac{53°}{2}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

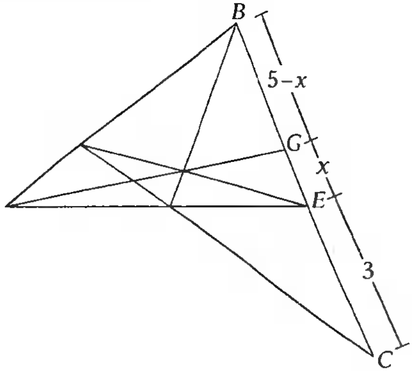
En el gráfico, $BE=5$ y $EC=3$. Calcule GE.

A) $3/2$
B) $13/11$
C) $15/11$
D) $8/11$
E) $13/9$



Resolución

Nos piden $GE=x$.



Datos:

$BE=5$ y $EC=3$

En el gráfico, por teorema, los puntos B, G, E y C forman una cuaterna armónica. Entonces

$$\frac{BG}{GE}=\frac{BC}{EC}$$

$$\frac{5-x}{x}=\frac{8}{3}$$

Desarrollamos

$$15-3x=8x \quad \to \quad 15=11x$$

$$\therefore \quad x=\frac{15}{11}$$

Clave **C**

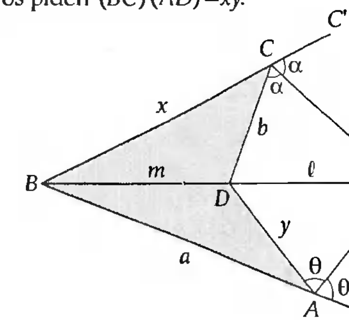
PROBLEMA N.° 3

En un cuadrilátero $ABCP$ se ubica el punto D en $\overline{BP}$, tal que los ángulos BAP y DAP son suplementarios. Si $m\sphericalangle DCP=m\sphericalangle PCC'$ y $(AB)(DC)=8$, calcule $(AD)(BC)$. Considere que C' pertenece a la prolongación de $\overline{BC}$.

A) $2\sqrt{2}$ B) 8 C) 6
D) 4 E) $4\sqrt{2}$

Resolución

Nos piden $(BC)(AD)=xy$.



Dato: $ab=8$

Por teorema de la bisectriz exterior

$\triangle BCD$: $\dfrac{x}{b}=\dfrac{m+\ell}{\ell}$ (I)

$\triangle BAD$: $\dfrac{a}{y}=\dfrac{m+\ell}{\ell}$ (II)

De (I) y (II)

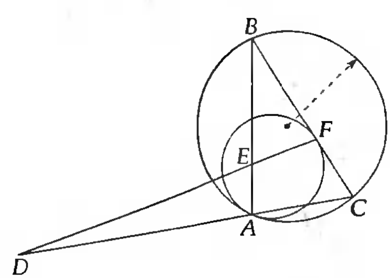
$$\frac{x}{b}=\frac{a}{y} \quad \to \quad xy=ab$$

$$\therefore \quad xy=8$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

En el gráfico, A y F son puntos de tangencia. Si $BF=3$ y $AC=2(FC)=2(AE)=4$, halle AD.



A) 9 B) 12 C) 10
D) 11 E) 13

Resolución

Nos piden $AD=x$.

Datos:

$BF=3$ y $AC=2(FC)=2(AE)=4$

A y F son puntos de tangencia, entonces

$m\sphericalangle BAF=m\sphericalangle FAC=\gamma$

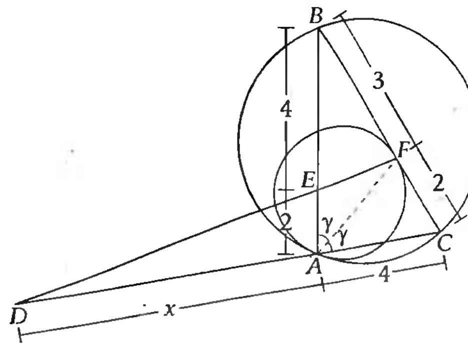
Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle ABC$

$$\frac{BE+2}{3}=\frac{4}{2} \rightarrow BE=4$$

Por teorema de Menelao en el $\triangle ABC$

$$(x)(4)(2)=(x+4)(2)(3)$$

$\therefore\ x=12$



Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

En un triángulo ABC se ubican los puntos D y E en AC y BC, respectivamente, tal que una circunferencia contiene a los puntos A, B, E y D. Si $AB=BD$ y $CD=5(AD)=5(ED)$, determine $m\widehat{ABE}$.

A) 106° B) 212° C) 148° D) 184° E) 152°

Resolución

Nos piden $m\widehat{ABE}$.

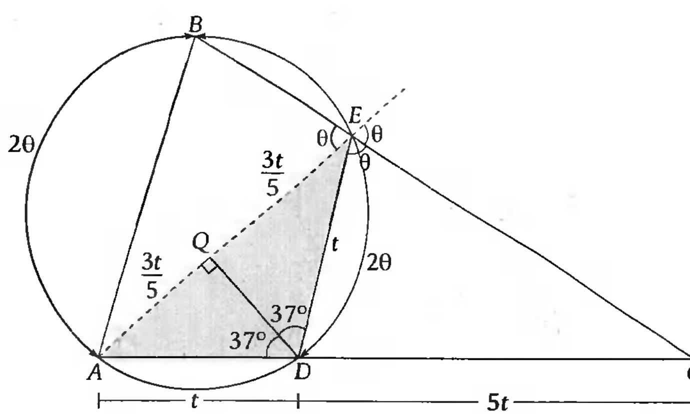
Datos:

$AB=BD$

$\rightarrow\ m\widehat{AB}=m\widehat{BD}=2\theta$

$m\sphericalangle AEB=m\sphericalangle DEC=\theta$

$CD=5(AD)=5(ED)$



Por teoreoma de la bisectriz exterior en el $\triangle AED$

$$\frac{AE}{ED}=\frac{AC}{DC}$$

Entonces

$$\frac{AE}{t}=\frac{6\cancel{t}}{5\cancel{t}}$$

Luego

$$AE=\frac{6t}{5}$$

En el $\triangle ADE$

$$AQ=QE=\frac{3t}{5}$$

En el ⊿ AQD

$$\frac{AQ}{AD}=\frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad m\sphericalangle ADQ=37^\circ$$

De donde

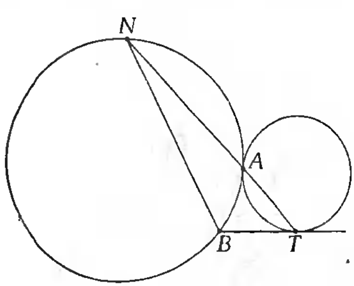
$$m\sphericalangle ADE=74^\circ$$

$$\therefore \quad m\overset{\frown}{ABE}=148^\circ$$

Clave C

PROBLEMA N.° 6

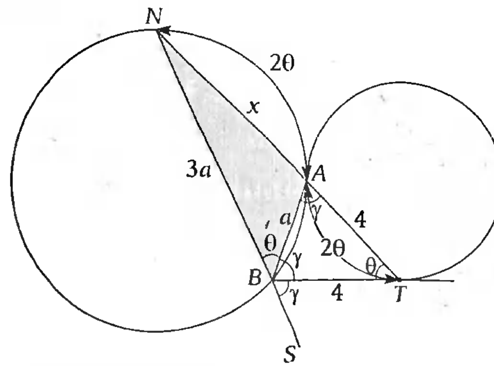
En el gráfico, A y T son puntos de tangencia. Si $AT=BT=4$ y $BN=3(AB)$, señale NA.



A) 6
B) 4
C) 10
D) 12
E) 8

Resolución

Nos piden $AN=x$.



A: punto de tangencia

Entonces

$$m\overset{\frown}{NA}=m\overset{\frown}{AT}=2\theta$$

$$m\sphericalangle ATB=m\sphericalangle ABN=\theta$$

Dato:

$$AT=TB=4$$

Entonces

$$m\sphericalangle BAT=m\sphericalangle ABT=\gamma$$

En el $\triangle ABT$

$$2\gamma+\theta=180^\circ \quad \rightarrow \quad m\sphericalangle SBT=\gamma$$

Por teorema de la bisectriz exterior en $\triangle ANB$

$$\frac{NB}{BA}=\frac{NT}{AT} \qquad \text{(I)}$$

Dato:

$$\frac{NB}{BA}=3 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

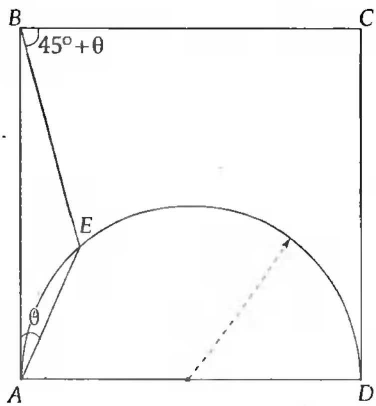
$$3=\frac{x+4}{4}$$

$$\therefore \quad x=8$$

Clave E

PROBLEMA N.° 7

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Halle $m\widehat{AE}$.



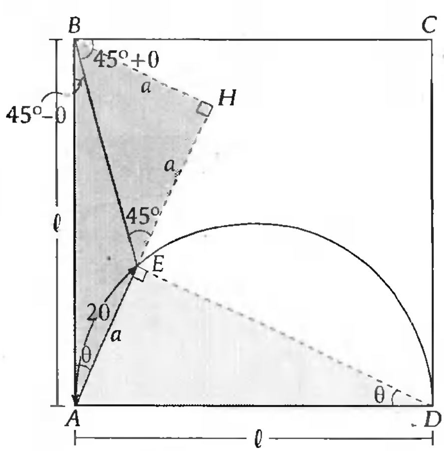
A) 45° B) 37°

C) 53°

D) 18°30' E) 30°

Resolución

Nos piden $m\widehat{AE}=2\theta$.



Se traza $\overline{BH}\perp\overline{AE}$, $m\measuredangle BEH=45°$

$\triangle BHA\cong\triangle AED$, entonces

$BH=AE=a$

En el $\triangle AHB$

$AH=2(BH)$, entonces

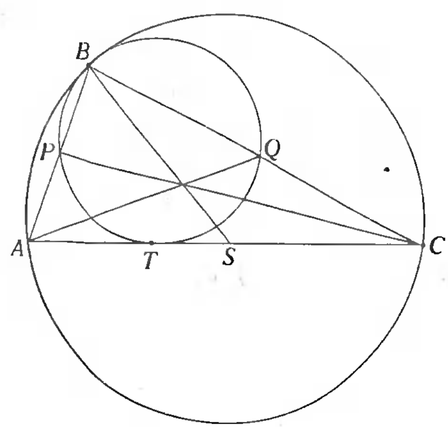
$\theta=\dfrac{53°}{2}$

$\therefore\ m\widehat{AE}=53°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Según el gráfico, B y T son puntos de tangencia. Si $\dfrac{AB}{3}=\dfrac{BC}{5}$, indique $\dfrac{TS}{AC}$.

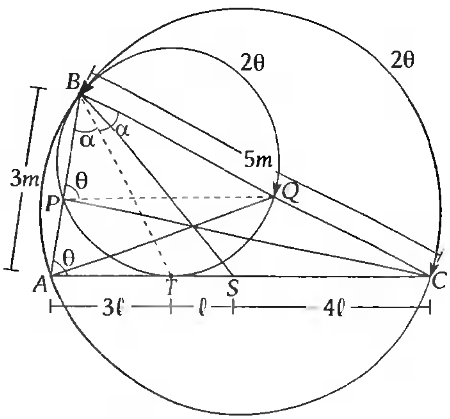


A) $\dfrac{3}{8}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{2}{5}$

D) $\dfrac{1}{8}$ E) $\dfrac{4}{7}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{TS}{AC}$.

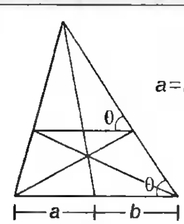


Dato: $\dfrac{AB}{3}=\dfrac{BC}{5}$

B y T son puntos de tangencia, entonces

$m\sphericalangle ABT=m\sphericalangle CBT=\alpha$

Nota



$a=b$

Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle ABC$

$$\frac{AT}{TC}=\frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{AT}{TC}=\frac{3}{5}$$

De donde

$AT=3\ell$; $TC=5\ell$

$m\overset{\frown}{BQ}=m\overset{\frown}{BC}=2\theta$

Por propiedad

$m\sphericalangle BPQ=m\sphericalangle BAC=\theta$

$\overline{PQ}//\overline{AC} \rightarrow AS=SC=4\ell$

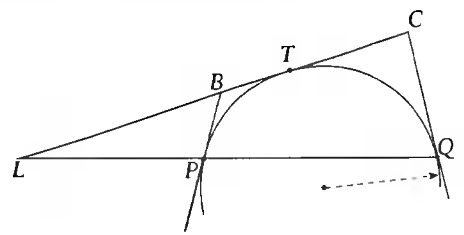
Luego $TS=\ell$

$$\therefore \quad \frac{TS}{AC}=\frac{\cancel{\ell}}{8\cancel{\ell}}=\frac{1}{8}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

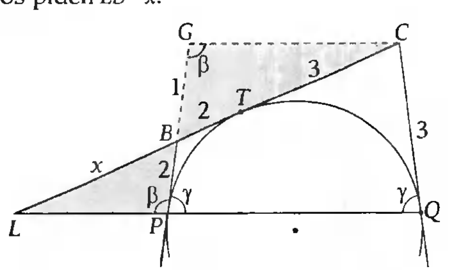
En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $PB=2$ y $CQ=3$, calcule LB.



A) 8 B) 10 C) 12
D) 15 E) 16

Resolución

Nos piden $LB=x$.



Datos: $PB=2$ y $CQ=3$

Prolongamos $\overline{PB}$ hasta G, tal que $\overline{GC}//\overline{PQ}$

$m\sphericalangle GPQ=m\sphericalangle CQP=\gamma$

$\square PGCQ$: trapecio isósceles, entonces

$PG=CQ=3$; $GB=1$

Por corolario del teorema de Tales: $\dfrac{x}{BC}=\dfrac{BP}{BG} \rightarrow \dfrac{x}{5}=\dfrac{2}{1}$

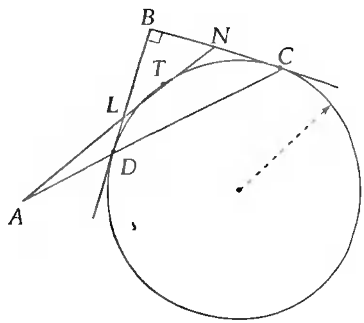
$\therefore \quad x=10$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 10

En el gráfico, D, T y C son puntos de tangencia. Si $3(AL)=10(TN)$, calcule $m\widehat{DT}$.

A) 30°
B) 16°
C) 45°
D) 37°
E) 53°



Resolución

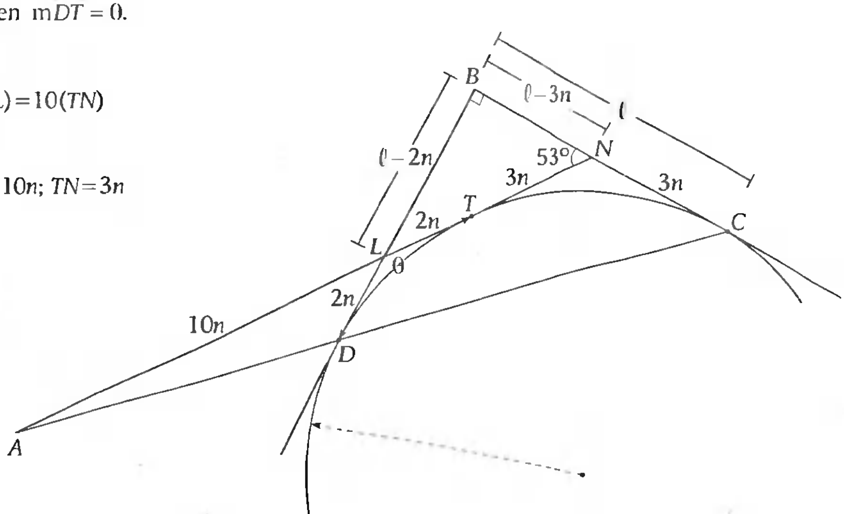
Nos piden $m\widehat{DT}=\theta$.

Dato:

$3(AL)=10(TN)$

Luego

$AL=10n$; $TN=3n$



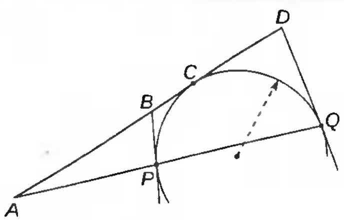
A, L, T y N forman una cuaterna armónica

$$\rightarrow \quad (10n)(3n)=(LT)(13n+LT)$$

Al desarrollar obtenemos

$$LT=2n$$

Nota



P, C y Q: puntos de tangencia, entonces
A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

Sea $BD=BC=\ell$

$\triangle LBN$: $(5n)^2=(\ell-2n)^2+(\ell-3n)^2 \quad \rightarrow \quad \ell=6n$

Reemplazamos en

$$\frac{LB}{LN}=\frac{4}{5} \rightarrow \quad m\measuredangle BLN=37^\circ$$

Por teorema

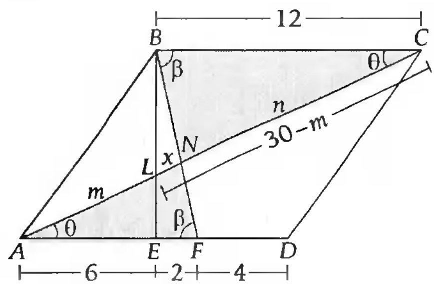
$$m\overset{\frown}{DT}=m\measuredangle BLN$$

$\therefore \quad \theta=37^\circ$

Clave **D**

Resolución

Nos piden $LN=x$.



A, E, F y D forman una cuaterna armónica según dato, entonces,

$$(6)(FD)=(2)(8+FD) \quad \rightarrow \quad FD=4$$

$\triangle ANF \sim \triangle CNB$

$$\frac{m+x}{n}=\frac{8}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{m+x}{m+n+x}=\frac{8}{20}$$

Dato

$$m+n+x=30 \quad \rightarrow \quad x+m=12 \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ALE \sim \triangle CLB$

$$\frac{m}{30-m}=\frac{6}{12} \quad \rightarrow \quad m=10 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$x=2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

Se tiene un romboide $ABCD$. En $\overline{AD}$ se ubican los puntos E y F, tal que A, E, F y D forman una cuaterna armónica. Si $AE=3(EF)=6$; $AC=30$; $\overline{BF}\cap\overline{AC}=\{N\}$ y $\overline{BE}\cap\overline{AC}=\{L\}$, calcule LN.

A) 1 B) 1,5 C) 1,6
D) 2,5 E) 2

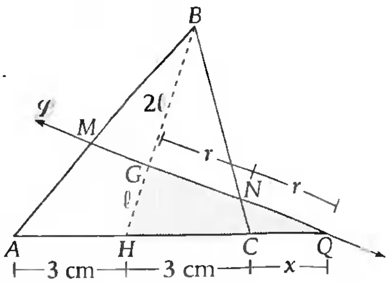
PROBLEMA N.° 12

En un triángulo ABC, de baricentro G, se traza la recta secante $\mathscr{L}$, que pasa por G e interseca a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$ en M, N y Q, respectivamente. Si $GN=NQ$ y $AC=6$ cm, indique CQ.

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

Resolución

Nos piden $CQ=x$.



G: baricentro del $\triangle ABC$

Dato:

$AC=6$ cm

Luego:

$AH=HC=3$ cm y $BG=2(GH)$

Dato:

$GN=NQ$

Por teorema de Menelao en el $\triangle HQG$

$(x)(r)(3\ell)=(3\text{ cm})(r)(2\ell)$

$\therefore\ x=2$ cm

Clave **B**

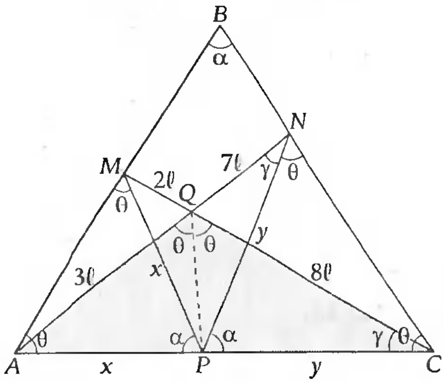
PROBLEMA N.° 13

Dado un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$; en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M, N y P, respectivamente, tal que $AP=PM$ y $NP=PC$. Si $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en Q y $\dfrac{AQ}{3}=\dfrac{QN}{7}=\dfrac{MQ}{2}$, halle $\dfrac{AP}{PC}$.

A) 2/5 B) 4/7 C) 1/3
D) 3/8 E) 1/2

Resolución

Nos piden $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{x}{y}$.



Dato:

$$\frac{AQ}{3}=\frac{QN}{7}=\frac{MQ}{2}$$

Sea

$AQ=3\ell\ \rightarrow\ QN=7\ell$ y $MQ=2\ell$

$\triangle APN\cong\triangle MPC$ (L. A. L.)

$AN=MC\ \rightarrow\ 10\ell=QC+2\ell$

$\rightarrow\ QC=8\ell$

$m\measuredangle ANP=m\measuredangle MCP=\gamma$

$\square PQNC$: inscriptible

$\rightarrow\ m\measuredangle PQC=m\measuredangle CNP=\theta$ y

$m\measuredangle AQP=m\measuredangle NCP=\theta$

Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle AQC$

$$\frac{x}{y}=\frac{AQ}{QC}\ \rightarrow\ \frac{x}{y}=\frac{3\ell}{8\ell}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{3}{8}$$

Clave **D**

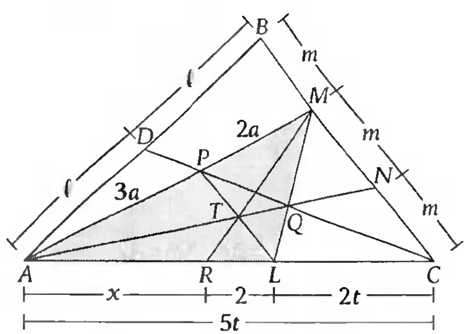
PROBLEMA N.° 14

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y AN, las cuales intersecan a la mediana CD en P y Q, respectivamente. Si $BM=MN=NC$; la prolongación de $\overline{MQ}$ interseca a $\overline{AC}$ en L; $\overline{PL} \cap \overline{AQ}=\{T\}$; $\overleftrightarrow{MT} \cap \overline{AL}=\{R\}$ y $RL=2$, calcule AR.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Nos piden AR.



Datos:

$BM=MN=NC$; $AD=DB$

Por teorema de Menelao en el $\triangle MAB$

$(\ell)(AP)(2m)=(\ell)(PM)(3m)$

$\rightarrow \dfrac{AP}{PM}=\dfrac{3}{2}$

$\triangle AMC$:

$MN=NC \rightarrow \overline{PL}//\overline{MC}$

Luego

$$\frac{AC}{LC}=\frac{AM}{PM}=\frac{5\cancel{a}}{2\cancel{a}}=\frac{5}{2}$$

Del $\triangle AML$: A, R, L y C forman una cuaterna armónica, entonces

$$\frac{AR}{RL}=\frac{AC}{LC}=\frac{5}{2} \rightarrow AR=\frac{5}{2}(RL)$$

Dato:

$RL=2$

$\therefore AR=5$

Clave **C**

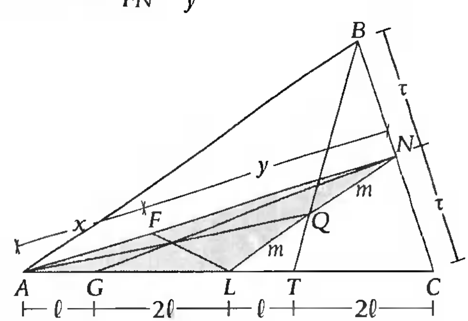
PROBLEMA N.° 15

En un triángulo ABC se traza la base media NL respecto del lado $AB(N \in \overline{BC})$, para después trazar la ceviana interior BT, tal que $TC=2(LT)$ y $\overline{NL} \cap \overline{BT}=\{Q\}$. Si en el triángulo ANL se trazan las cevianas interiores LF y NG, las cuales se intersecan en un punto de $\overline{AQ}$ y $TC=GL$, calcule $\dfrac{AF}{FN}$.

A) 1/3 B) 2/3 C) 1/2
D) 3/4 E) 2/5

Resolución

Nos piden $\dfrac{AF}{FN}=\dfrac{x}{y}$.



$\overline{NL}$: base media del $\triangle ABC$

Dato:

$TC=2(LT)$

Si $LT=\ell$

$\rightarrow$ $TC=2\ell$ y $AL=3\ell$

Por teorema de Menelao en el $\triangle NLC$

$(LQ)(\tau)(2\ell)=(\ell)(QN)(2\tau)$

$\rightarrow$ $LQ=QN$

También

$GL=TC=2\ell$ y $AG=\ell$

Por teorema de Ceva en el $\triangle ALN$

$(x)(2\ell)(m)=(y)(\ell)(m)$

$2x=y$

$\therefore$ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior AE, en cuya prolongación se ubica el punto T, tal que $m\measuredangle BTA=90°$. Si $BE=a$, $EC=b$, $AE=AC$ y $m\measuredangle ABC=m\measuredangle EAC$, determine $\dfrac{AE}{ET}$.

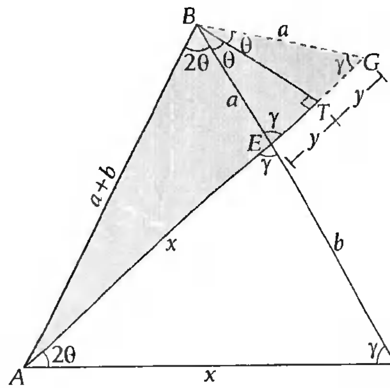
A) $\dfrac{2(a+b)}{a}$ B) $\dfrac{(a+b)}{a-b}$

C) $\dfrac{2(a+b)}{b-a}$

D) $\dfrac{ab-b}{b+a}$ E) $\dfrac{2a-b}{b+a}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{AE}{ET}=\dfrac{x}{y}$.



Dato:

$AE=AC$; $BE=a$ y $EC=b$

Sea

$m\measuredangle EAC=2\theta$

$\rightarrow$ $m\measuredangle AEC=m\measuredangle ACE=90°-\theta$

Luego

$\gamma=90°-\theta$

Se prolonga $\overline{AT}$ hasta G, de manera que

$BG=BE=a$

$\triangle EBG$: isósceles, entonces

$ET=TG=y$

Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle ABG$

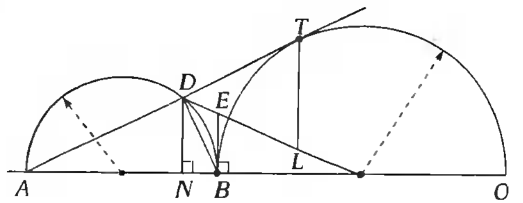
$\dfrac{x}{2y}=\dfrac{a+b}{a}$

$\therefore$ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2(a+b)}{a}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

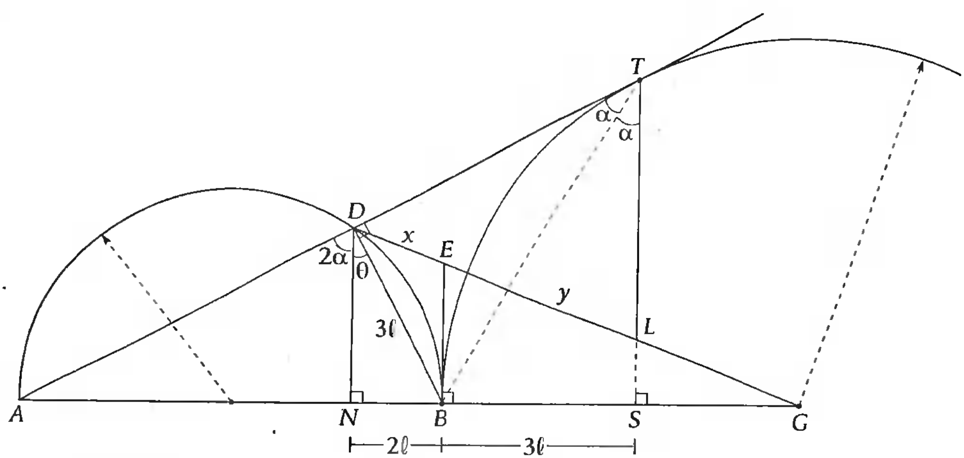
En el gráfico, B y T son puntos de tangencia. Si los ángulos NDB y DTL son complementarios, además $2(DB)=3(NB)$, calcule $\dfrac{DE}{EL}$.



A) 1/2 B) 3/4 C) 1/3 D) 2/3 E) 1/4

Resolución

Piden $\dfrac{DE}{EL}=\dfrac{x}{y}$.



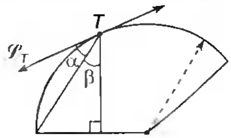
Los ángulos NDB y DTL son complementarios

$\rightarrow\ \theta+2\alpha=90°$

$m\measuredangle ADN=m\measuredangle ATL$, entonces $\overline{TS}\perp\overline{BG}$

T: punto de tangencia, luego $m\measuredangle DTB=m\measuredangle BTS=\alpha$

Nota



$\alpha=\beta$

Por teorema de la bisectriz

$BS=BD=3\ell$

Dato:

$2(DB)=3(NB)$

Por teorema de Tales

$\dfrac{DE}{EL}=\dfrac{2\ell}{3\ell}$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$

Clave **D**

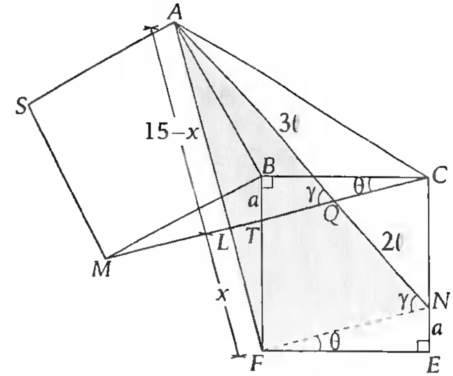
PROBLEMA N.° 18

En un triángulo obtusángulo ABC (obtuso en B), se construyen exteriormente los cuadrados $ABMS$ y $BCEF$, y se ubican los puntos T y N en BF y CE, respectivamente.
Si $NE = TB$, M, T y C (colineales);
$\overline{MC}\cap\overline{AN}=\{Q\}$; $\dfrac{AQ}{QN}=\dfrac{3}{2}$; $MC=15$ y
$\{L\}=\overline{AF}\cap\overline{MC}$, determine LF.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

Resolución

Nos piden $LF=x$.



Dato:

$\dfrac{AQ}{QN}=\dfrac{3}{2}$

$MC=15$

$\triangle MBC\cong\triangle ABF$ (L. A. L.), entonces

$AF=MC=15$;

$AL=15-x$

Por dato:

$TB=NE=a$

$⊿CBT\cong⊿FEN$, de donde

$\rightarrow\ m\sphericalangle TCB=m\sphericalangle NFE=\theta$

Luego, $\overline{LQ}//\overline{FN}$

Por teorema de Tales

$\dfrac{15-x}{x}=\dfrac{3\ell}{2\ell}$

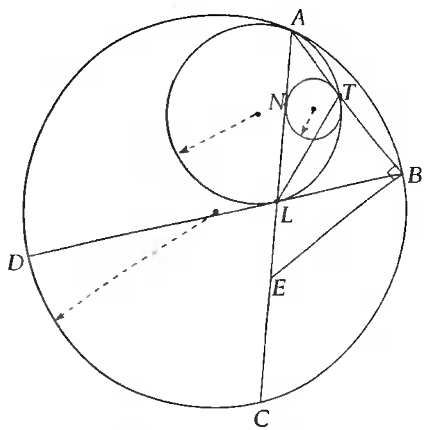
$30-2x=3x$

$\therefore\ x=6$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

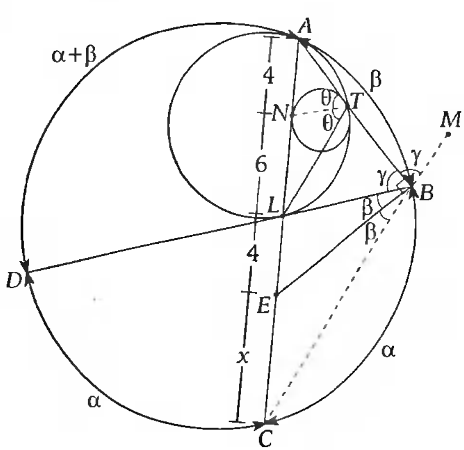
En el gráfico, A, T, N y L son puntos de tangencia. Si $\frac{AT}{TL}=\frac{2}{3}$; $m\overset{\frown}{AD}-m\overset{\frown}{CD}=m\overset{\frown}{AB}$; $AL=10$ y $LE=AN$, señale EC.



A) 7/2 B) 7 C) 26/3
D) 28/3 E) 14/3

Resolución

Nos piden $EC=x$.



Dato:

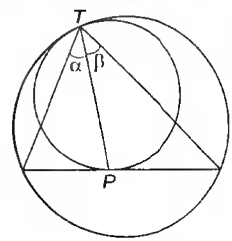
$$\frac{AT}{TL}=\frac{2}{3}$$

Además

$AL=10$ y $LE=AN$

$m\overset{\frown}{AD}-m\overset{\frown}{CD}=m\overset{\frown}{AB}$

Nota



T y P: puntos de tangencia, luego: $\alpha=\beta$

Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle ATL$

$$\frac{AN}{NL}=\frac{AT}{TL}=\frac{2}{3}, \text{ entonces}$$

$AN=4$ y $NL=6$; $LE=4$

También

$m\overset{\frown}{DC}=m\overset{\frown}{CB}=\alpha$

Luego

$m\overset{\frown}{AD}=m\overset{\frown}{ABC}=\alpha+\beta$

$$m\sphericalangle ATD=m\sphericalangle ABM=\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma$$

Siendo $\overline{BA}$ y $\overline{BE}$, bisectriz exterior e interior del $\triangle LBC$.

Además, A, L, E y C forman una cuaterna armónica, luego

$$\frac{10}{4}=\frac{14+x}{x} \quad \to \quad 10x=56+4x$$

$$\therefore \quad x=\frac{28}{3}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

Dado un triángulo ABC, de incentro I, se traza $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$, bisectriz interior y ceviana exterior respectivamente, además $C \in \overline{MN}$. Si

$\overline{NI} \cap \overline{BC}=\{L\}$, $\overleftrightarrow{ML} \cap \overline{BN}=\{S\}$ y

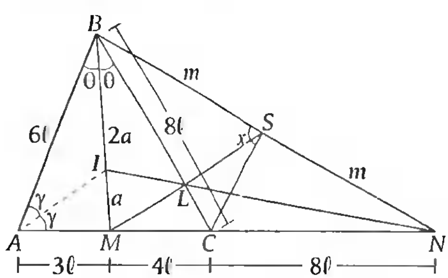
$$\frac{AB}{6}=\frac{BC}{8}=\frac{AC}{7}=\frac{CN}{8},$$

calcule m$\measuredangle CSB$.

A) 76° B) 74° C) 53°
D) 80° E) 90°

Resolución

Nos piden m$\measuredangle CSB=x$.



Dato:

$$\frac{AB}{6}=\frac{BC}{8}=\frac{AC}{7}=\frac{CN}{8}$$

Si

$AB=6\ell$

luego

$BC=8\ell$

$AC=7\ell$

$CN=8\ell$

Teorema de la bisectriz interior en el $\triangle ABC$

$$\frac{AM}{MC}=\frac{6\ell}{8\ell}=\frac{3}{4}, \text{ entonces}$$

$AM=3\ell$ y $MC=4\ell$

$$\frac{BI}{IM}=\frac{AB}{AM}$$

Reemplazamos

$$\to \quad \frac{BI}{IM}=\frac{6\ell}{3\ell}=2$$

Teorema de Ceva en el $\triangle BMN$

$(2a)(SN)(4\ell)=(a)(BS)(8\ell)$

$\to \quad SN=BS$

Además

$BC=CN$

$\therefore \quad x=90°$

Clave **E**

Capítulo

12

Teoremas de configuración

Para la construcción de extensas vías de transporte (carreteras) o el tendido de postes de corriente se requiere, en el campo, colocar puntos alineados. También para la ubicación de puntos que estén dentro de un radio determinado de alcance se requiere conocer cuándo estos pertenecen a una circunferencia o están dentro o fuera de ella.

También los incas hacían uso de los conceptos de puntos de igual altitud (configuración), en donde se conservaban similares propiedades de los fenómenos climáticos, consiguiendo de esta manera microclimas en una pequeña extensión de terreno, situación que era aprovechada para los cultivos de la población.

En este capítulo emplearemos en las soluciones los teoremas recíprocos del cuadrilátero inscrito y los teoremas de Menelao y Ceva que permiten determinar la colinealidad de puntos o puntos que son concíclicos.

Capítulo **12**

Teoremas de configuración

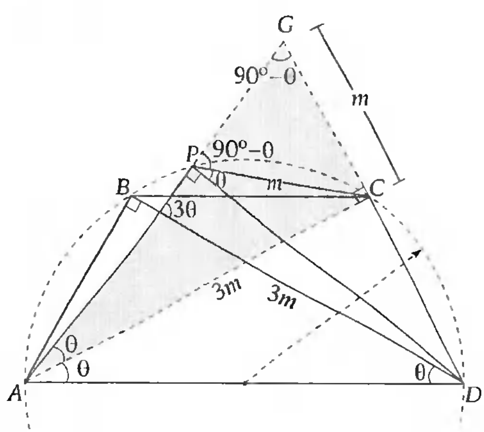
PROBLEMA N.° 1

Dado un trapecio isósceles $ABCD$ ($\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$), en la región exterior relativa al lado $\overline{BC}$ se ubica el punto P, tal que $m\measuredangle APD=90°$. Si $BD=3(PC)$ y $m\measuredangle ABD=90°$, además la medida del ángulo determinado por $\overline{AP}$ y $\overline{BD}$ es el triple de $m\measuredangle CPD$, calcule $m\measuredangle PAD$.

A) 18°30' B) 26°30' C) 37°
D) 53° E) 45°

Resolución

Nos piden $m\measuredangle PAD$.



$\square ABCD$: trapecio isósceles

$m\measuredangle ABD=m\measuredangle APD=90°$

Entonces A, B, P, C y D son concíclicos

$AC=BD=3(PC)=3m$

$m\measuredangle CPD=m\measuredangle CAD=\theta$

$m\measuredangle(\overline{AP};\overline{BD})=3(m\measuredangle CPD)=3\theta$

Se traza

$\overline{CG}/m\measuredangle CGP=90°-\theta$

$GC=PC=m$

$\triangle GCA$: $AC=3(GC)$, luego

$$\theta=\frac{37°}{2}$$

Como

$m\measuredangle PAD=2\theta$

$\therefore\ m\measuredangle PAD=37°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

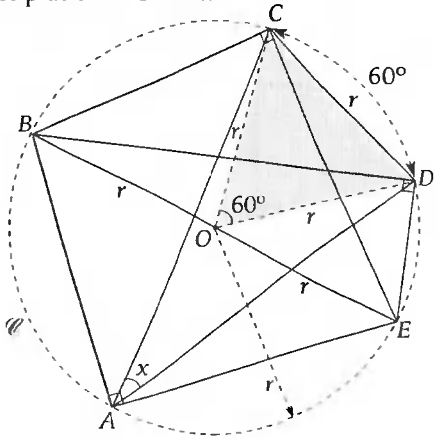
En un pentágono convexo $ABCDE$, $BE=2(CD)$ y $m\measuredangle BCE=m\measuredangle BDE=m\measuredangle BAE=90°$.
Señale $m\measuredangle CAD$.

A) 30° B) 45° C) $\frac{37°}{2}$

D) $\frac{53°}{2}$ E) 36°

Resolución

Nos piden m∢CAD=x.



Datos:

m∢BCE=m∢BDE=m∢BAE=90° y

BE=2(CD)

Del gráfico, podemos notar que $ABCE$ y $ABDE$ son inscriptibles, por lo tanto, A, B, C, D y E serán puntos concíclicos, por ello se traza la circunferencia $\mathscr{C}$.

$\overline{BE}$: diámetro ($BE=2r$)

Se trazan $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$, luego notamos que el triángulo OCD es equilátero.

$m\overset{\frown}{CD}$ = m∢COD=60°

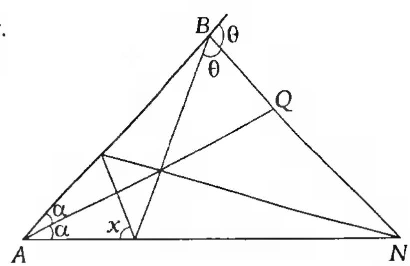
Por propiedad: $x=\dfrac{m\overset{\frown}{CD}}{2}$

$\therefore\ x=30°$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

En el gráfico mostrado, m∢AQN=140°. Indique x.



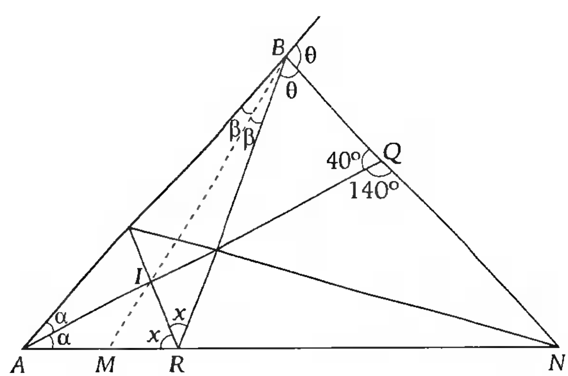
A) 70°
B) 35°
C) 20°
D) 40°
E) 50°

Resolución

Nos piden x.

Dato:

m∢AQN=140°



En el $\triangle ABR$, por teorema A, M, R y N forman una cuaterna armónica.

$\overline{BN}$: bisectriz exterior

entonces

$\overline{BM}$: bisectriz interior

Luego

$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle MBR = \beta$

I será el incentro del $\triangle ABR$, entonces

$m\sphericalangle IRB = m\sphericalangle IRA = x$

Q: excentro del $\triangle ABR$, entonces

$m\sphericalangle ARB = 2(m\sphericalangle AQB)$

$2x = 2(40°)$

$\therefore\ x = 40°$

Clave **D**

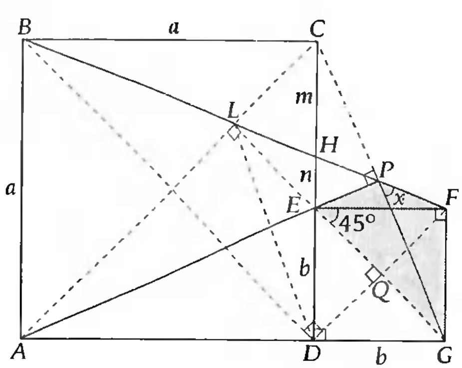
PROBLEMA N.° 4

Sean los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ (E en $\overline{CD}$ y G en la prolongación de $\overline{AD}$). Si la recta AE interseca a $\overline{BF}$ en P, calcule $m\sphericalangle FPG$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 37°

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle FPG = x$.



Por dato: $ABCD$ y $DEFG$ son cuadrados.

$m\sphericalangle BDF = 90°$ y $DQ = QF$, entonces

$BL = LF = LD$

Luego, A, L y C son colineales

$⊿BCH \sim ⊿FEH$:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{CH}{HE};\ \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

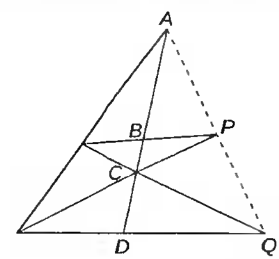
De donde obtenemos

$$\frac{CH}{HE} = \frac{CD}{ED}$$

Entonces, C, H, E y D forman una cuaterna armónica.

Recuerda

Tome en cuenta el siguiente teorema:



Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica, entonces, A, P y Q serán colineales.

Luego, en el problema, C, P y G serán colineales.

E: Ortocentro del $\triangle ACG$, entonces

$\overline{AP} \perp \overline{CG}$

$m\sphericalangle EPG = m\sphericalangle EFG = 90°$

$⏢ EPFG$: inscriptible

$\therefore\ x = 45°$

Clave **B**

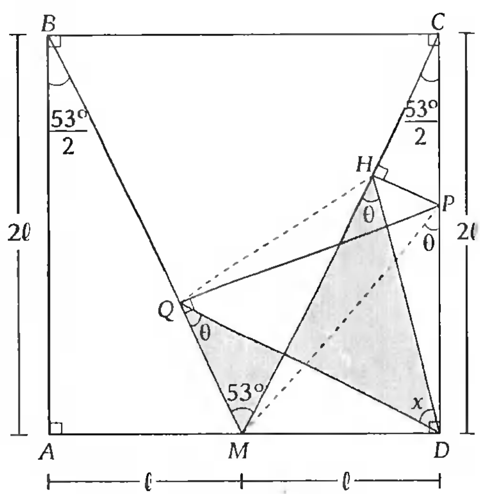
PROBLEMA N.° 5

En un cuadrado $ABCD$, M es punto medio de $\overline{AD}$. Si en $\overline{CD}$ se ubica el punto P, desde el cual se trazan las perpendiculares PQ y PH a $\overline{BM}$ y $\overline{CM}$, respectivamente (Q en $\overline{BM}$, H en $\overline{MC}$), señale m$\measuredangle QDH$.

A) 60° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 74°

Resolución

Nos piden m$\measuredangle QDH=x$.



Dato: $AM=MD$ y $ABCD$ es un cuadrado.

$AB=2(AM)$, entonces

$$m\measuredangle ABM=\frac{53°}{2}$$

De igual modo

$$m\measuredangle MCD=\frac{53°}{2}$$

⏢$MHPD$: inscriptible, entonces

$$m\measuredangle MHD=m\measuredangle MPD=\theta$$

⏢$MQPD$: inscriptible, luego

$$m\measuredangle MQD=m\measuredangle MPD=\theta$$

También M, Q, H, P y D son concíclicos.

$\rightarrow$ m$\measuredangle PDH$=m$\measuredangle QMH$ y como $\overline{AB}//\overline{CD}$

m$\measuredangle BMC$=m$\measuredangle ABM$+m$\measuredangle MCD$

Reemplazamos

$$m\measuredangle BMC=\frac{53°}{2}+\frac{53°}{2}=53°=m\measuredangle QMH$$

Por lo tanto, en el gráfico

$x=53°$

Clave **D**

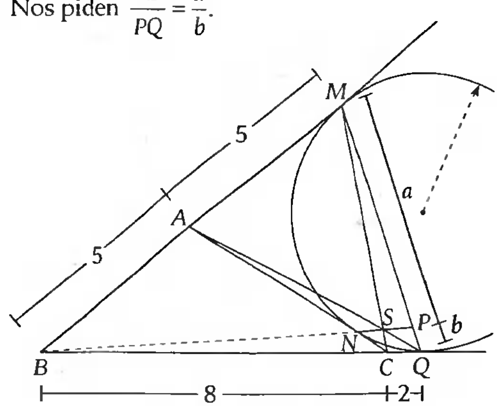
PROBLEMA N.° 6

La circunferencia exinscrita al triángulo ABC, relativa a $\overline{AC}$, es tangente a $\overline{AC}$ en N y a las rectas AB y BC en M y Q, respectivamente. Si $\overline{MC}\cap\overline{AQ}=S$ y la recta NS interseca a $\overline{MQ}$ en P, calcule MP/PQ. Considere que $AB=5$; $BC=8$ y $AC=7$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Nos piden $\frac{MP}{PQ}=\frac{a}{b}$.



Datos:

$AB=5;\ BC=8;\ AC=7$

M, N y Q son puntos de tangencia.

Por teorema

$BM=BQ=p_{\blacktriangle ABC}$, entonces

$$BM=BQ=\frac{5+8+7}{2}=10$$

Luego

$AM=5$ y $CQ=2$

Por teorema: A, N y S son puntos colineales.
De acuerdo al teorema de Ceva en el $\triangle BMQ$

$$(MP)(AB)(CQ)=(PQ)(AM)(BC)$$

$$\rightarrow\ (a)(5)(2)=(b)(5)(8)$$

$$a=4b$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=4$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 7

En un triángulo ABC se trazan la ceviana interior AN y la bisectriz CM.

Si $\dfrac{AM\cdot BN}{BM\cdot CN}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{4}$, resuelva $\dfrac{m\sphericalangle BAN}{m\sphericalangle NAC}$.

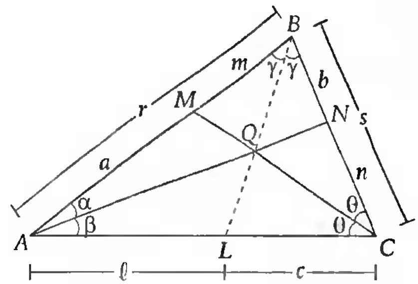
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{37}{53}$

D) 2 E) 1

Resolución

Nos piden

$$\frac{m\sphericalangle BAN}{m\sphericalangle NAC}=\frac{\alpha}{\beta}.$$



Por dato: $\dfrac{(AM)(BN)}{(BM)(CN)}=\dfrac{AB}{BC}$, entonces

$$\frac{ab}{mn}=\frac{r}{s} \qquad \text{(I)}$$

Según el teorema de Ceva, en el $\triangle ABC$ se tendrá: $(AM)(BN)(LC)=(MB)(CN)(AL)$

$$abc=mn\ell$$

De donde

$$\frac{ab}{mn}=\frac{\ell}{c} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{\ell}{c}=\frac{r}{s}$$

Entonces, $\overline{BL}$ será una bisectriz interior en el $\triangle ABC$ y $m\sphericalangle ABQ=m\sphericalangle QBC=\gamma$

Q: incentro del $\triangle ABC$, entonces $\alpha=\beta$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta}=1$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 8

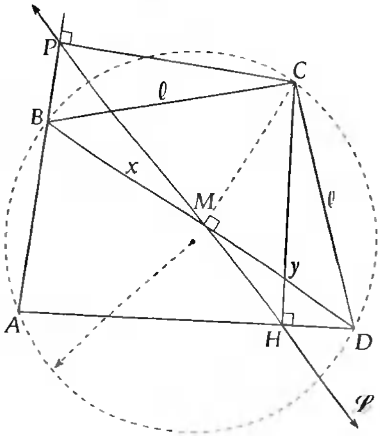
En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$, donde $BC=CD$ y las proyecciones ortogonales de C sobre AB y AD, respectivamente, son P y H. Si $\overline{PH}\cap\overline{BD}=M$, halle BD/BM.

A) 1 B) 2 C) 0,5

D) 3 E) $\sqrt{2}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{BD}{BM}=\dfrac{2x}{y}$.



Dato:

$BC=CD$

$\overline{CP}\perp\overline{AB}$ y $\overline{CH}\perp\overline{AD}$

Entonces P y H determinan una de las rectas de Simpson relativo al punto C en el $\triangle ABD$.

Luego

$\overline{CM}\perp\overline{BD}$

$m\sphericalangle CMD=90°$ y

$BC=CD$

$\rightarrow$ en el $\triangle BCD$: $BM=MD$

$x=y$

$\therefore\ \dfrac{BD}{BM}=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

Sean D, E y F tres puntos cualesquiera en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Las circunferencias circunscritas a los triángulos AEF y BFD se intersecan en M $(M\neq F)$.
Si posteriormente en la región interior se ubica el punto P, tal que $EP=PM$ y $m\sphericalangle EDP=m\sphericalangle PDM$, además $m\sphericalangle ACB=70°$, calcule $m\sphericalangle EPD$.

A) 70° B) 140° C) 110° D) 125° E) 145°

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle EPD=x$.

Del gráfico (en M)

$\gamma+\theta+y=360°$ (I)

Del $\triangle ABC$

$\gamma+\theta=180°+70°$ (II)

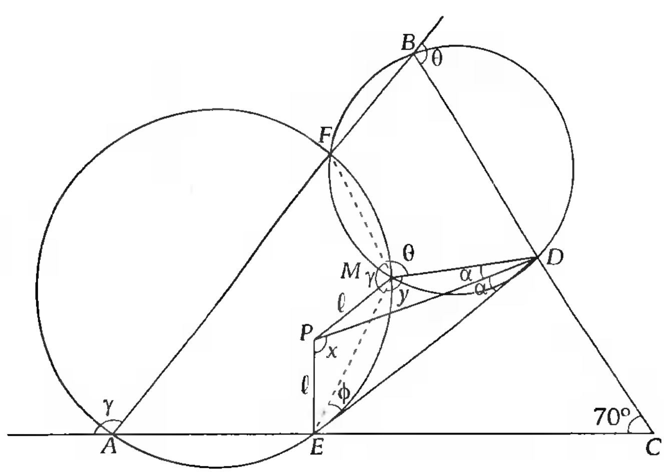
De (I) en (II)

$250°+y=360°\ \rightarrow\ y=110°$

Por dato:

$EP=PM$

$m\sphericalangle PDM=m\sphericalangle PDE$



Entonces, el ⏢$EPMD$ será inscriptible o simétrico respecto a $\overleftrightarrow{PD}$.

Si fuese simétrico $MD=ED$, luego

$y < 90°$

Pero $y=110°$, entonces ⏢$EPMD$ será inscriptible, luego

$m\measuredangle EPD = m\measuredangle EMD \rightarrow x=y$

$\therefore\ x=110°$

Clave **B**

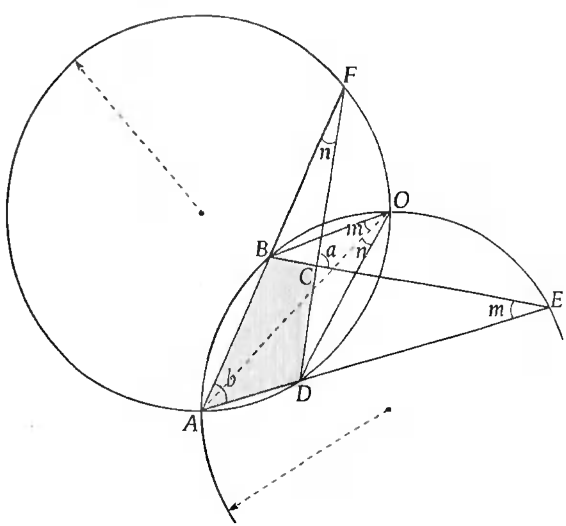
PROBLEMA N.° 10

Sea $AFCE$ el cuadrilátero completo respecto del cuadrilátero convexo $ABCD$ (B en $\overline{AF}$ y D en $\overline{AE}$). Si las circunferencias circunscritas de los triángulos AFD y AEB se intersectan en O ($O \neq A$), halle $m\measuredangle BOD$. Asuma que $m\measuredangle BCD - m\measuredangle BAD = 60°$.

A) 120° B) 60° C) 45° D) 90° E) 75°

Resolución

Nos piden $m\measuredangle BOD = m+n$.



Dato:

$m\measuredangle BCD - m\measuredangle BAD = 60°$

entonces $a-b=60°$

Por teorema del ángulo inscrito

$$m\measuredangle AEB = m\measuredangle AOB = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = m$$

$$m\measuredangle AOD = m\measuredangle AFB = \frac{m\overset{\frown}{AD}}{2} = n$$

Del cuadrilátero $AFCE$

$a=b+m+n$

$\rightarrow\ m+n=a-b$

$\therefore\ m\measuredangle BOD = a-b = 60°$

Clave **B**

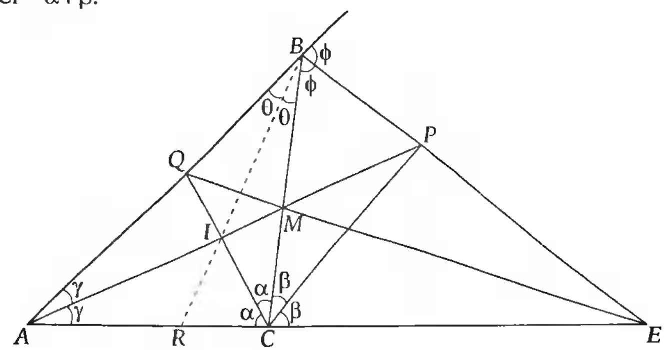
PROBLEMA N.° 11

En un triángulo ABC ($AB > BC$), se traza la bisectriz exterior BE. Si la prolongación de la bisectriz interior AM interseca a $\overline{BE}$ en P, y además la recta EM interseca a $\overline{AB}$ en Q, señale m$\sphericalangle PCQ$.

A) 60°   B) 135°   C) 45°   D) 36°   E) 90°

Resolución

Nos piden m$\sphericalangle QCP=\alpha+\beta$.



Por dato, $\overline{AM}$ y $\overline{BE}$ son una bisectriz interior y una bisectriz exterior en el $\triangle ABC$.

Por teorema, en el $\triangle ABC$: A, R, C y E forman una cuaterna armónica, entonces $\overline{BR}$ será bisectriz interior.

Luego, I será el incentro del $\triangle ABC$ y P será el excentro relativo a $\overline{BC}$.

$\rightarrow$ m$\sphericalangle ACQ=$m$\sphericalangle QCB=\alpha$ y

m$\sphericalangle BCP=$m$\sphericalangle PCE=\beta$

En C

$2\alpha+2\beta=180° \rightarrow \alpha+\beta=90°$

$\therefore$ m$\sphericalangle QCP=90°$

Clave **E**

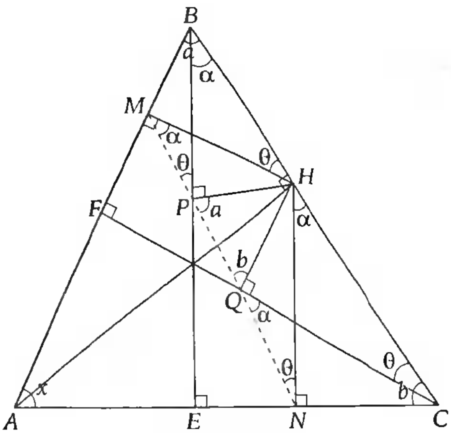
PROBLEMA N.° 12

En un triángulo ABC, el pie de la altura AH se proyecta sobre los lados AB, AC y sobre las alturas BE y CF, en los puntos M, N, P y Q, respectivamente. Si m$\sphericalangle MQH+$m$\sphericalangle NPH=130°$, indique m$\sphericalangle BAC$.

A) 50°   B) 65°   C) 40°   D) 70°   E) 60°

Resolución

Nos piden m∢$BAC=x$.



Dato:

m∢MQH+m∢$NPH=130°$

$\rightarrow\ a+b=130°$

Sea

m∢$NHC=\alpha$

⏢$NQHC$: inscriptible, entonces

m∢$NQC=\alpha$

De igual modo

m∢PMH=m∢$PBH=\alpha$

Entonces, M, Q y N son puntos colineales

Sea

m∢$MHB=\theta$

⏢$MBHP$ inscriptible, entonces

m∢$MPB=\theta$

De igual modo

m∢QNH=m∢$QCH=\theta$

Entonces, M, P y N son puntos colineales.

Luego, M, P, Q y N serán colineales.

m∢MBH=m∢$QPH=a$

m∢NCH=m∢$PQH=b$

$\triangle ABC$

$x+a+b=180°$

$\therefore\ x=50°$

Clave **A**

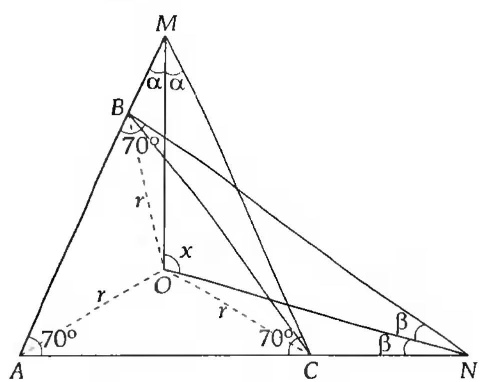
PROBLEMA N.° 13

Sean los triángulos isósceles AMC y ANB de bases $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tal que ($B\in\overline{AM}$ y $C\in\overline{AN}$). Si O es circuncentro del triángulo ABC, halle m∢MON. Considere que m∢$BOC=140°$.

A) 70° B) 140° C) 80°
D) 110° E) 100°

Resolución

Nos piden m∢$MON=x$.



O: circuncentro del $\triangle ABC$

$OA=OB=OC=r$ y

m∢$BOC=2$(m∢BAC)

Dato

$m\measuredangle BOC=140°$, entonces

$m\measuredangle BAC=70°$

En el $\measuredangle ANOM$

$x=70°+\alpha+\beta$ (I)

En el $\triangle AMC$

$AM=MC$

$AO=OC$

$\rightarrow$ $m\measuredangle OMA=m\measuredangle OMC=\alpha$

En el $\triangle ABN$

$BN=AN$

$AO=OB$

$\triangle OBN\cong\triangle OAN$ (L. L. L.)

$m\measuredangle ONB=m\measuredangle ONA=\beta$

En el $\triangle AMC$

$2\alpha+70°+70°=180°$

$\rightarrow$ $\alpha=20°$ (II)

En el $\triangle BNA$

$2\beta+70°+70°=180°$

$\rightarrow$ $\beta=20°$ (III)

De (II) y (III) en (I)

$x=70°+20°+20°$

$\therefore$ $x=110°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

En un triángulo ABC se trazan las cevianas AN y CM, tal que $\overline{AN}\cap\overline{CM}=P$. Si $PMBN$ es inscriptible, $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{NB}$ y $m\measuredangle ACB=42°$, calcule $m\measuredangle QPC$. Identifique a Q como punto medio de $\overline{AC}$.

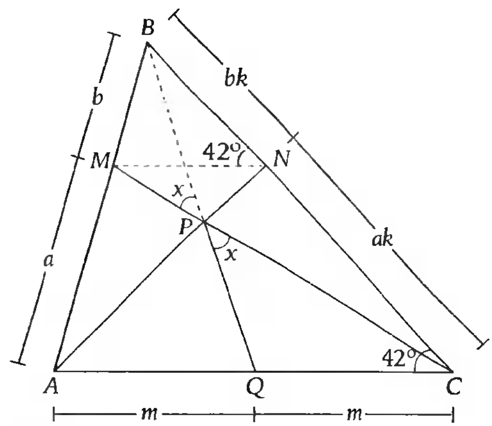
A) 48° B) 84°

C) 42°

D) 21° E) 63°

Resolución

Nos piden $m\measuredangle QPC=x$.



Por dato:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{NC}{BN}$$

Luego, por el recíproco del corolario del teorema de Tales: $\overline{MN}//\overline{AC}$, entonces

$m\measuredangle MNB=m\measuredangle ACB=42°$

$AQ=QC$ y $\overline{MN}//\overline{AC}$

Por lo tanto, B, P y Q serán puntos colineales.

Según dato, el $\square MBNP$ es inscriptible, entonces

$m\measuredangle MPB=m\measuredangle MNB$

$\therefore$ $x=42°$

Clave **C**

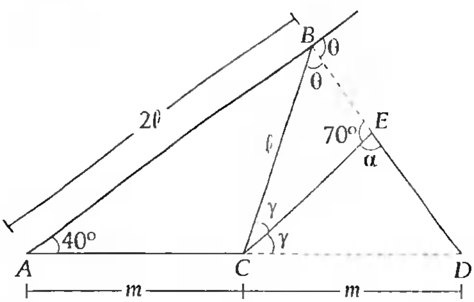
PROBLEMA N.° 15

En un triángulo ABC, de excentro E relativo al lado BC, se ubica el punto D en la prolongación de $\overline{AC}$; tal que $AC=CD$ y $AB=2(BC)$. Si $m\sphericalangle BAC=40°$, señale $m\sphericalangle CED$.

A) 100° B) 120° C) 110°
D) 140° E) 150°

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle CED=\alpha$.



Datos:

$AC=CD$ y $AB=2(BC)$

$\rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}$

Luego, $\overline{BD}$ será bisectriz exterior del $\triangle ABC$.

E: excentro del $\triangle ABC$, entonces B, E y D serán puntos colineales.

$m\sphericalangle BEC=90°-\dfrac{m\sphericalangle BAC}{2}$

$m\sphericalangle BAC=40°$

$\rightarrow m\sphericalangle BEC=70°$

$\alpha+70°=180°$

$\therefore \alpha=110°$

Clave **C**

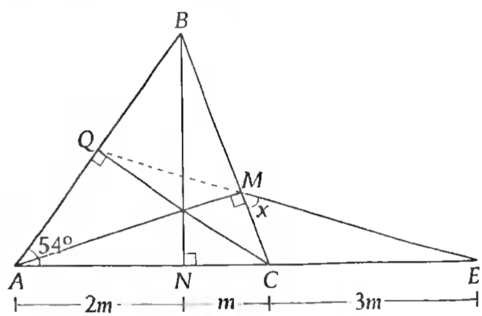
PROBLEMA N.° 16

En un triángulo ABC se trazan las alturas AM, BN y CQ. Si en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto E, tal que $NC=\dfrac{AN}{2}=\dfrac{CE}{3}$, además, $m\sphericalangle BAC=54°$, calcule $m\sphericalangle CME$.

A) 36° B) 72°
C) 27°
D) 81° E) 54

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle CME=x$.



Datos:

$NC=\dfrac{AN}{2}=\dfrac{CE}{3}$ y $m\sphericalangle BAC=54°$

Sea $NC=m$, entonces $AN=2m$ y $CE=3m$

Notamos

$\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AE}{CE}$

Entonces, A, N, C y E forman una cuaterna armónica.

Luego, Q, M y E serán puntos colineales

$⏢AQMC$: inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle CME=m\sphericalangle QAC$

$\therefore x=54°$

Clave **E**

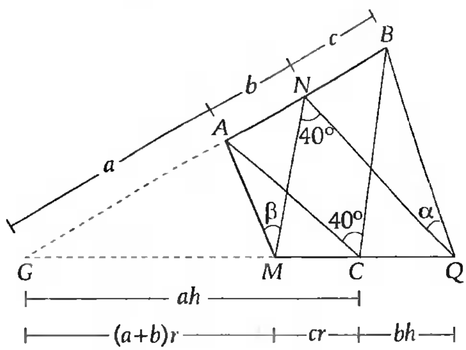
PROBLEMA N.° 17

Sean los triángulos ABC y MNQ, donde $N \in \overline{AB}$ y $C \in \overline{MQ}$, si $\overline{NQ}//\overline{AC}$ y $\overline{MN}//\overline{BC}$.
Halle $m\sphericalangle BQN + m\sphericalangle AMN$. Además, se sabe que $m\sphericalangle ACB=40°$.

A) 50°
B) 40°
C) 80°
D) 110°
E) 70°

Resolución

Nos piden $\alpha+\beta$.



Dato:

$\overline{NM} // \overline{BC}$

$\rightarrow \quad \dfrac{GM}{MC}=\dfrac{GN}{NB}$

Sean

$GA=a$,

$AN=b$ y

$NB=c$

Luego

$\dfrac{GM}{MC}=\dfrac{a+b}{c}$

Dato:

$\overline{AC} // \overline{NQ}$

Entonces

$\dfrac{GC}{CQ}=\dfrac{GA}{AN}=\dfrac{a}{b}$

$GC=ah$

$\rightarrow \quad (a+b+c)r=ah$

Dividiendo entre $(a+b)$

$\dfrac{(a+b+c)\,r}{a+b}=\dfrac{ah}{a+b}$

$\dfrac{a+b+c}{(a+b)h}=\dfrac{a}{(a+b)r}$

$\rightarrow \quad \dfrac{GB}{GQ}=\dfrac{GA}{GM}$

Luego

$\overline{AM} // \overline{BQ}$

$m\sphericalangle MNQ=\alpha+\beta$

$\therefore \quad \alpha+\beta=40°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Dado un triángulo ABC, de circuncentro O; en $\overline{AC}$ se ubica el punto M. Si las mediatrices de $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ intersecan a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q, respectivamente, y $m\sphericalangle OPB=70°$, calcule $m\sphericalangle OQB$.

A) 70°
B) 140°
C) 50°
D) 125°
E) 110°

Resolución

O: circuncentro del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle OAB$=m$\sphericalangle OBA=\alpha$

m$\sphericalangle AON$=m$\sphericalangle ABC$

$\theta=\alpha+\gamma$

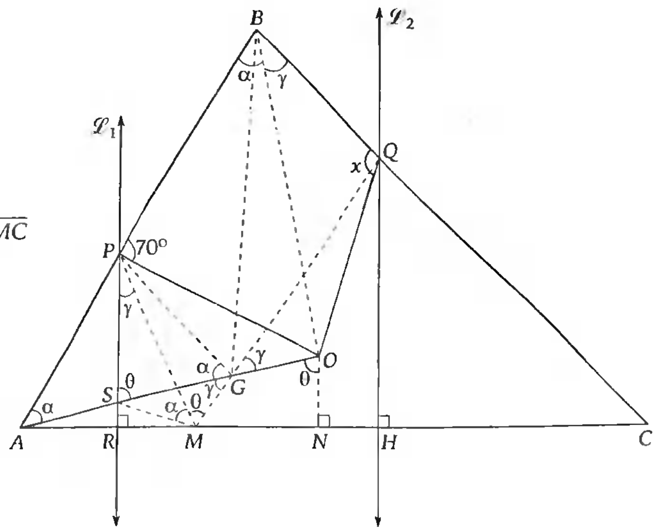
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: mediatrices de $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle PMS$=m$\sphericalangle PAS=\alpha$

m$\sphericalangle PMQ$=m$\sphericalangle PBQ=\theta$

$\square SPGM$: inscriptible, entonces

m$\sphericalangle SGM$=m$\sphericalangle SPM=\gamma$



Los cuadriláteros $GBQO$ y $PBOG$ son inscriptibles.

Entonces, P, B, Q, O y G serán puntos concíclicos.

Luego

$x+70°=180°$

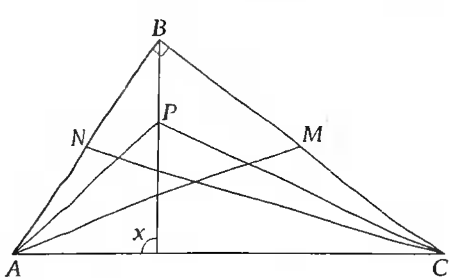
$\therefore\ x=110°$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

En el gráfico, si $AN=NB$, $BM=MC$, m$\sphericalangle PAB$=m$\sphericalangle MAC$ y m$\sphericalangle PCA$=m$\sphericalangle NCB$; calcule x.

A) 60°
B) 90°
C) 45°
D) 75°
E) 115°



Nos piden x.

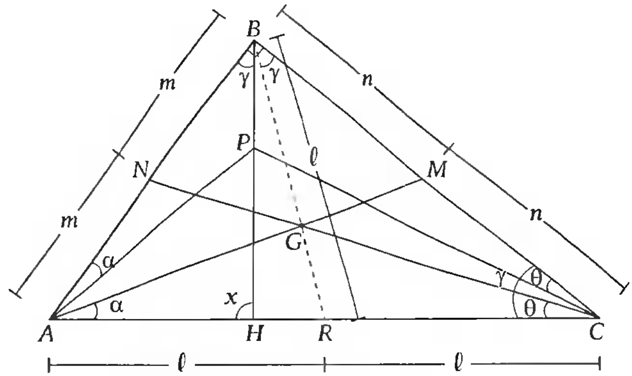
Dato: $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle MAC$

Entonces $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AG}$ son rayos isogonales del ángulo BAC.

Por dato:

$m\sphericalangle PCA = m\sphericalangle NCB$

Entonces $\overleftrightarrow{CP}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ son rayos isogonales del ángulo ACB.



Luego, los puntos P y Q son conjugados isogonales en el $\triangle ABC$.

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PBA = m\sphericalangle GBC = \gamma$; como $AN=NB$ y $BM=MC$, entonces G es baricentro del $\triangle ABC$, luego $AR=RC=BR=\ell$

En el $\triangle HBC$:

$x = m\sphericalangle HBC + m\sphericalangle HCB \rightarrow x = (90° - \gamma) + \gamma$

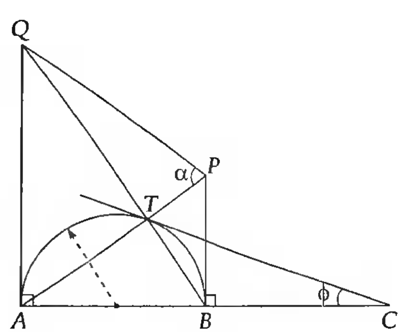
$\therefore$ $x = 90°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

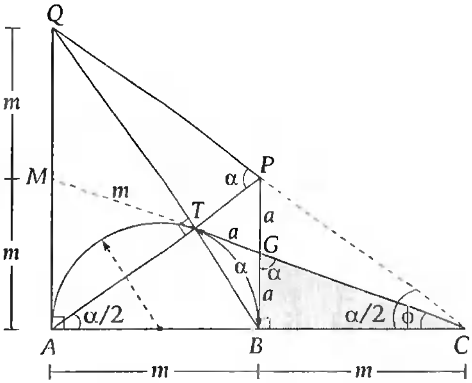
Si $AB=BC$ y T es punto de tangencia, calcule $\alpha+\phi$.

A) 70°
B) 90°
C) 80°
D) 55°
E) 110°



Resolución

Nos piden $\alpha+\phi$.



T: punto de tangencia

En el $\triangle ATQ$

$AM=MQ=TM=m$

En el $\triangle BTP$

$GT=BG=PG=a$

Notamos:

$$\frac{PG}{GB}=\frac{QM}{MA} \quad \text{y} \quad \overline{PB}//\overline{QA},$$

entonces Q, P y C serán colineales

Por dato:

$AB=BC$

$\rightarrow \quad m\measuredangle ACP=m\measuredangle PAC=\dfrac{\alpha}{2}$

Dado que

$AP=PC \quad \text{y} \quad m\measuredangle APQ=\alpha$

$m\overset{\frown}{TB}=2(m\measuredangle TAB) \quad \rightarrow \quad m\overset{\frown}{TB}=\alpha;$

$m\measuredangle BGC=m\overset{\frown}{TB} \quad \rightarrow \quad m\measuredangle BGC=\alpha$

Del $\triangle GBC$:

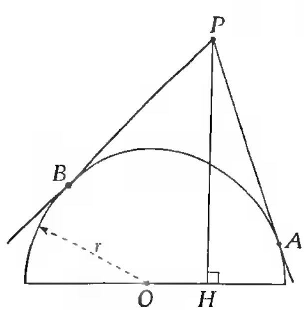
$m\measuredangle BGC+m\measuredangle BCG=90°$

$\therefore \quad \alpha+\phi=90°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 21

En el gráfico mostrado, $AB=r\sqrt{3}$ y $PH=h$. Calcule $AH+BH$ (A y B son puntos de tangencia).



A) $h\sqrt{2}$ B) $\dfrac{3h}{2}$ C) $h\sqrt{3}$ D) $\dfrac{h\sqrt{6}}{2}$ E) h

Resolución

Nos piden $AH+BH=a+b$.

Datos:

$PH=h$ y $AB=r\sqrt{3}$

$OB=r$ y $AO=r$

Entonces

$m\sphericalangle AOB=120°$

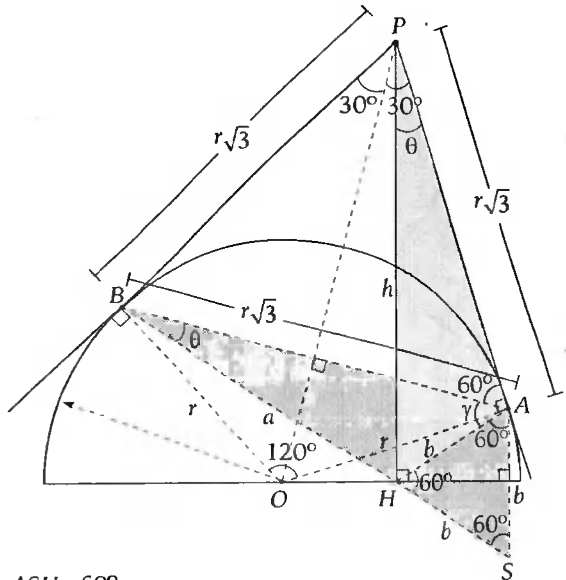
A y B son puntos de tangencia

En el $\triangle BPA$ es equilátero

$m\sphericalangle OBP=m\sphericalangle OHP=m\sphericalangle OAP=90°$

Entonces P, A, H, O y B serán concíclicos

$m\sphericalangle ABH=m\sphericalangle HPA=\theta$



Se prolonga $\overline{BH}$ hasta S, de manera que $m\sphericalangle ASH=60°$

El $\triangle AHS$ es equilátero, entonces

$HS=AH=b$

$\triangle SBA \cong \triangle HPA$ (A. L. A.)

$\rightarrow\ BS=PH$

$\therefore\ a+b=h$

Clave **E**

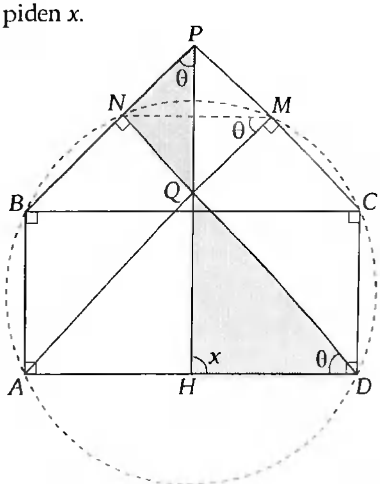
PROBLEMA N.° 22

Dado un rectángulo $ABCD$, en la región exterior y relativo al lado BC se ubica el punto P, tal que al trazar $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$, perpendiculares a $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$ ($M\in\overline{PC}$; $N\in\overline{PB}$), estos se intersecan en Q. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{AD}$.

A) 60° B) 120° C) 90°
D) 100° E) 80°

Resolución

Nos piden x.



En el gráfico, los cuadriláteros $ABND$ y $AMCD$ son inscriptibles.

Entonces A, B, N, M, C y D serán puntos concíclicos, luego $m\sphericalangle ADN = m\sphericalangle AMN = \theta$

$\square QNPM$ es inscriptible, entonces

$m\sphericalangle QPN = m\sphericalangle QMN = \theta$

Del $\triangle QNP$ y $\triangle QHD$

$x + \theta = 90° + \theta$

$\therefore\ x = 90°$

Clave **C**

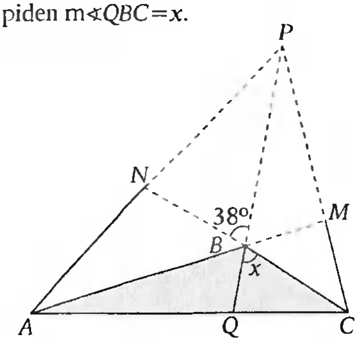
PROBLEMA N.° 23

En un triángulo ABC se ubican los puntos Q, M y N en $\overline{AC}$ y en las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, respectivamente. Si las prolongaciones de $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en P y $\dfrac{AM}{BM} \cdot \dfrac{BN}{CN} \cdot \dfrac{CQ}{AQ} = 1$, calcule $m\sphericalangle QBC$. Se sabe que $m\sphericalangle PBN = 38°$.

A) 38° B) 52° C) 19°
D) 16° E) 45°

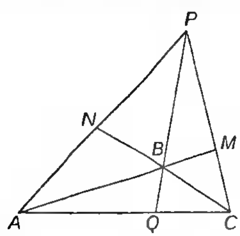
Resolución

Nos piden $m\sphericalangle QBC = x$.



Recuerda

Tome en cuenta el siguiente teorema:



A partir de los teoremas de Menelao y Ceva se puede demostrar que:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)\left(\frac{BN}{CN}\right)\left(\frac{QC}{AQ}\right) = 1$$

En el problema, por dato:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)\left(\frac{BN}{CN}\right)\left(\frac{QC}{AQ}\right) = 1$$

Luego, las cevianas AM, CN y PQ deberán ser concurrentes, entonces P, B y Q serán puntos colineales.

Por dato: $m\sphericalangle PBN = 38°$

Los ángulos PBN y QBC serán opuestos por el vértice.

$\therefore\ x = 38°$

Clave **A**

Capítulo

13

Transformaciones geométricas

El reflejo de imágenes en un espejo de agua obedece a una simetría de puntos que permite que un objeto se refleje en la superficie.

En este capítulo encontraremos soluciones empleando los teoremas y propiedades de traslación, simetría, homotecia, rotación o del producto de ellos.

En álgebra es común hacer un cambio de variables para simplificar operaciones, asimismo en geometría, para no caer en ecuaciones extensas o cálculos complejos de relaciones de medidas. En este capítulo trasladaremos una figura para facilitar su estudio y luego la regresaremos a su posición inicial para continuar nuestro análisis con el conocimiento de cierto elemento que esta transformación nos proporcionó.

Capítulo 13

Transformaciones geométricas

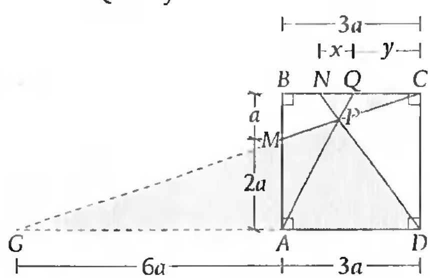
PROBLEMA N.° 1

En un cuadrado $ABCD$ se ubica el punto M en $\overline{AB}$, tal que $AM=2(MB)$. Si en $\overline{MC}$ se ubica el punto P y las rectas AP y DP intersecan a $\overline{BC}$ en Q y N, respectivamente, indique $\dfrac{NQ}{QC}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 0,5 E) 0,25

Resolución

Nos piden $\dfrac{NQ}{QC}=\dfrac{x}{y}$.



Dato:

$AM=2(MB)$

$ABCD$: cuadrado $\rightarrow$ $BC=AB=3a$

Se prolonga $\overline{CM}$ y $\overline{DA}$ hasta G

$\triangle MBC \sim \triangle MAG$

$$\frac{BC}{GA}=\frac{BM}{MA}=\frac{a}{2a} \rightarrow \frac{3a}{GA}=\frac{1}{2}$$

Luego

$GA=6a$

Notamos $\overline{NC}//\overline{GD}$ donde P es el centro de homotecia, inversa de $\overline{NC}$ y $\overline{GD}$.

$$\rightarrow \frac{NQ}{AD}=\frac{QC}{GA}$$

$$\frac{x}{3a}=\frac{y}{6a};\ 2x=y$$

$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente se traza el triángulo equilátero BCD. Halle la distancia entre los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$, si $AD=a$.

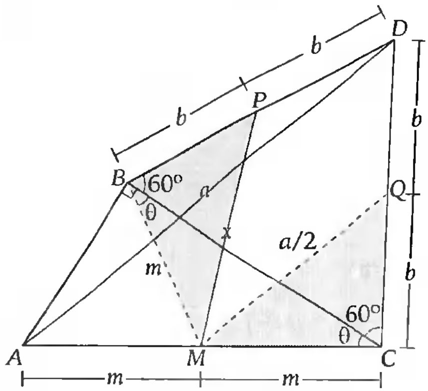
A) $\dfrac{a}{3}$ B) $\dfrac{a}{2}$

C) $\dfrac{a}{4}$

D) $\dfrac{2a}{3}$ E) $\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$

Resolución

Nos piden x, que es la distancia entre los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.



Dato:

$AD=a$

⊾ABC: $AM=MC=m$

Luego, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

$$BM=\frac{AC}{2}=\frac{2m}{2} \rightarrow BM=m$$

⏢$MBDC$: simétrico respecto de $\overline{MD}$

$\triangle BDC$: equilátero

Se ubica Q en $\overline{DC}$, de manera que $DQ=QC=b$

$\triangle ADC$: $MQ=\dfrac{AD}{2} \rightarrow MQ=\dfrac{a}{2}$

- $\triangle MBP$ y $\triangle MCQ$ son simétricos respecto de $\overline{MD}$.

$\triangle MBP \cong \triangle MCQ$

$\rightarrow MP=MQ$

$\therefore \quad x=\dfrac{a}{2}$

Clave **A**

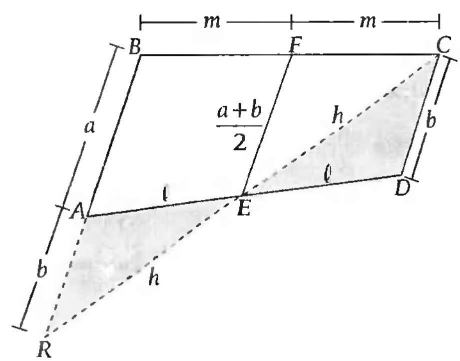
PROBLEMA N.° 3

Sea $ABCD$ un cuadrilátero en el que $EF=\dfrac{AB+CD}{2}$, donde E y F son los puntos medios de AD y BC, respectivamente. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$?

A) trapezoide simétrico
B) trapecio
C) paralelogramo
D) cuadrilátero inscriptible
E) rectángulo

Resolución

Nos piden determinar qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$.



Por dato:

$AE=ED$ y $BF=FC$

Sean

$AB=a$ y $CD=b$

Dato:

$$EF=\frac{AB+CD}{2} \rightarrow EF=\frac{a+b}{2}$$

Se prolonga $\overline{CE}$ hasta R de manera que $ER=EC$

$\triangle AER \cong \triangle DEC$(L. A. L.)

$\rightarrow AR=CD=b$ y $\overline{AR}//\overline{CD}$

Del teorema de los puntos medios en el $\triangle RBC$

$RB=2(EF) \rightarrow RB=a+b$

Luego

$RB=BA+RA$

Entonces, B, A y R serán puntos colineales.
Por lo tanto, el $\triangle ABCD$ será un trapecio.

Clave **B**

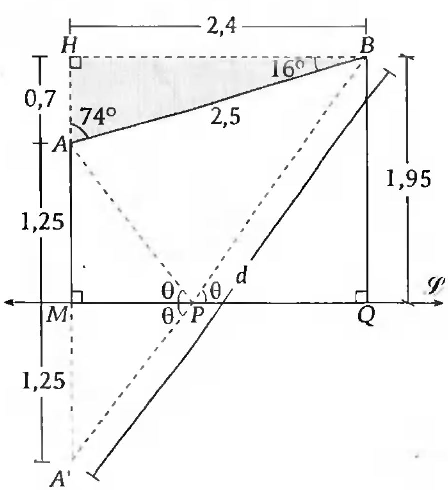
PROBLEMA N.° 4

Los puntos A y B están a un mismo lado de una recta y distan 1,25 m y 1,95 m, respectivamente, de ella. Si la distancia entre A y B es 2,5 m, calcule la longitud del menor recorrido para ir de A hasta B tocando a dicha recta.

A) 2,4 m B) 3,2 m C) 4 m
D) 4,2 m E) 4,8 m

Resolución

Nos piden d, que es la longitud del menor recorrido para ir de A a B pasando por un punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$.



Datos:

$AM=1{,}25$; $BQ=1{,}95$ y $AB=2{,}5$

Notamos

$d=AP+PB$; $P \in \overleftrightarrow{\mathscr{T}}$.

Sea A' el simétrico de A respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$.

Para que $(AP+PB)$ sea mínimo B, P y A' deberán ser colineales, entonces

$d=A'B$

Se prolonga $\overline{MA}$ hasta H de manera que $m\sphericalangle AHB=90°$

$MH=QB=1{,}95$

$\rightarrow AH=0{,}7$

⊿AHB: notable de 74° y 16°

Luego

$HB=2{,}4$

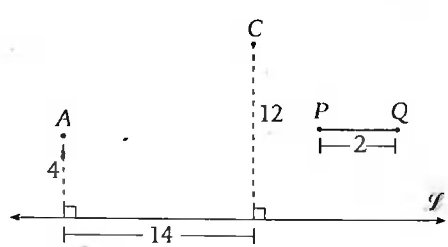
⊿$A'HB$: $d^2=(2{,}4)^2+(3{,}2)^2$

$\therefore d=4$ m

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

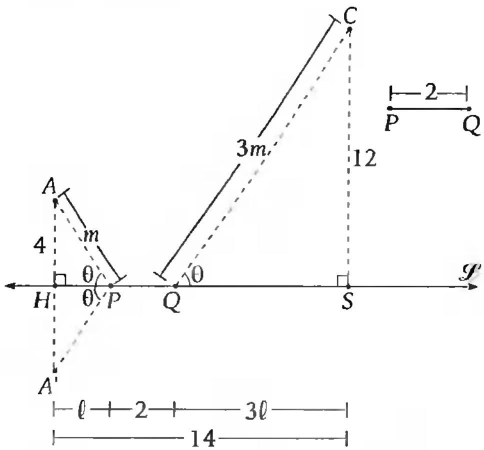
Según el gráfico mostrado, ubique el segmento PQ en $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$, tal que el recorrido $APQC$ sea mínimo. Calcule en esa posición $AP + QC$.



A) 15 B) 18 C) 20
D) 22 E) 24

Resolución

Nos piden $AP+QC$.



Sea A' el simétrico de A respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Por condición del problema, debemos ubicar $\overline{PQ}$ en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, tal que el recorrido $APQC$ sea mínimo, lo cual sucede cuando $\overline{PA'}//\overline{QC}$, entonces

$$m\sphericalangle A'PH=m\sphericalangle CQS=\theta$$

$⊿AHP \sim ⊿CSQ$

$$\frac{HP}{QS}=\frac{AP}{QC}=\frac{AH}{CS}=\frac{1}{3}$$

Si $HP=\ell \rightarrow QS=3\ell$

Si $AP=m \rightarrow QC=3m$

Dato:

$HS=14$

$\rightarrow 4\ell+2=14 \rightarrow \ell=3$

$⊿AHP$: $AH=4$ y $HP=3$

Luego

$AP=5$ y $QC=15$

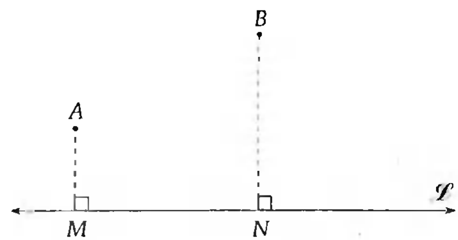
$\therefore AP+QC=20$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

En el gráfico mostrado,

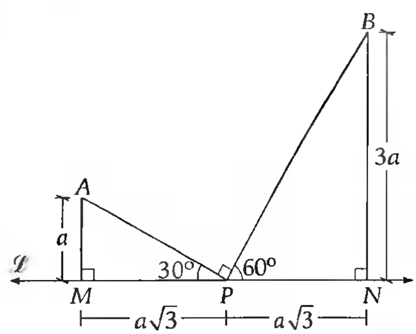
$AM=\frac{BN}{3}=a$ y $MN=2a\sqrt{3}$. Si se ubica en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ un punto P, tal que $m\sphericalangle NPB=2(m\sphericalangle MPA)$, señale $m\sphericalangle APB$.



A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle APB$.



Datos:

$$AM=\frac{BN}{3}=a \quad \text{y} \quad MN=2a\sqrt{3}$$

Por condición del problema, debemos ubicar P en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, de modo que

$$m\sphericalangle NPB=2(m\sphericalangle MPA)$$

Ubicando P como el punto medio de $\overline{MN}$, tendremos:

$MP=NP=a\sqrt{3}$

$MP=\sqrt{3}(AM) \rightarrow m\sphericalangle MPA=30°$

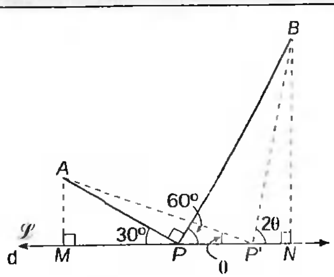
$BN=\sqrt{3}(NP) \rightarrow m\sphericalangle NPB=60°$

Notamos

$m\sphericalangle NPB=2(m\sphericalangle MPA)$

$\therefore\ m\sphericalangle APB=90°$

Nota



Ubicamos P' en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, tal que $m\sphericalangle NP'B=2(m\sphericalangle MP'A)$

$\triangle PAP'$: $\theta<30°$ (I)

$\triangle PBP'$: $60°<2\theta \rightarrow \theta>30°$ (II)

De (I) y (II) concluimos que P y P' deben coincidir.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

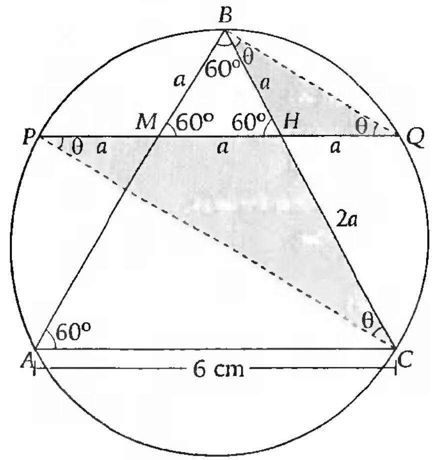
Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC; trace una cuerda PQ en $\mathscr{C}$, tal que $\overline{PQ}//\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ trisequen el segmento PQ. Si $AC=6$ cm, indique PQ.

A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm

D) $6\sqrt{3}$ cm E) $3\sqrt{2}$ cm

Resolución

Nos piden PQ.



Por dato, el $\triangle ABC$ es equilátero y $AC=6$ cm.

Además

$\overline{PQ}//\overline{AC}$ y $PM=MH=HQ$

$m\sphericalangle BMH=m\sphericalangle BAC=60°$

$\triangle MBH$: equilátero, entonces

$MB=BH=MH=a$

Notamos

$BH=HQ=a$, entonces

$m\sphericalangle BQH=m\sphericalangle HBQ=\theta$

$m\sphericalangle QPC=m\sphericalangle QBC=\theta$

Luego

$PH=HC=2a$

$BC=AC=PQ$

$\therefore\ PQ=6$ cm

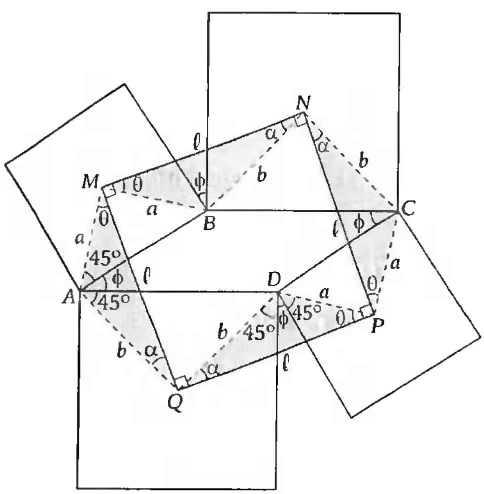
Clave **B**

PROBLEMA N.° 8

Si construimos cuadrados externamente sobre los lados de un paralelogramo, entonces sus centros son vértices de un

A) trapecio.
B) paralelogramo.
C) rectángulo.
D) trapezoide simétrico.
E) cuadrado.

Resolución



Sean M, N P y Q los centros de los cuadrados construidos externamente sobre los lados del paralelogramo $ABCD$.

$AM=DP=a$; $AQ=QD=b$

$m\sphericalangle MAQ=m\sphericalangle QDP=90°+\phi$

Luego

$\triangle QDP$=rot. $\triangle QAM(Q;\ 90°)$, entonces

$QP=QM$ y $m\sphericalangle MQP=90°$

De igual modo

$\triangle NCP$=rot. $\triangle QDP(P;\ 90°)$, entonces

$NP=QP$ y $m\sphericalangle QPN=90°$

$QM=NP$, $\overline{QM}//\overline{NP}$ y $m\sphericalangle MQP=90°$

Por lo tanto, el $\square QMNP$ será un cuadrado.

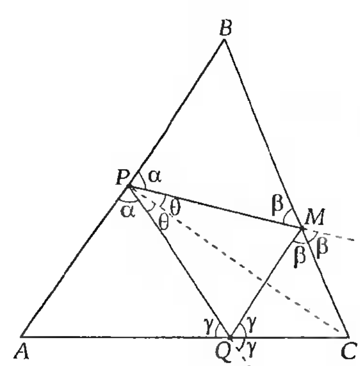
Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

Dado un triángulo acutángulo ABC cuyos lados reflejan la luz, indique dónde debería estar situada exactamente sobre el lado AB una fuente luminosa, de forma que el rayo emitido después de reflejarse sucesivamente en los otros dos lados retornará a la fuente.

A) En el punto medio de $\overline{AB}$.
B) En el pie de la bisectriz interior trazada desde C.
C) En el pie de la altura trazada desde C.
D) En el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con $\overline{AB}$.
E) En el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AB}$ con dicho lado.

Resolución



Sea P el punto de $\overline{AB}$ donde debe ubicarse la fuente de luz, para que el rayo emitido al reflejarse en los otros dos lados retorne a P.
Cuando un rayo luminoso se refleja sobre una superficie, los ángulos de incidencia y reflexión tienen igual medida.

Luego

$m\sphericalangle APQ=m\sphericalangle BPM=\alpha$

$m\sphericalangle AQP=m\sphericalangle CQM=\gamma$

$m\sphericalangle PMB=m\sphericalangle QMC=\beta$

C: excentro del $\triangle QPM$

$\rightarrow\ m\sphericalangle QPC=m\sphericalangle MPC=\theta$

En P

$2\alpha+2\theta=180°$

$\rightarrow\ \alpha+\theta=90°$

Así tendremos

$\overline{CP}\perp\overline{AB}$

Por lo tanto, P deberá ubicarse en el pie de la altura trazada desde C.

Clave **C**

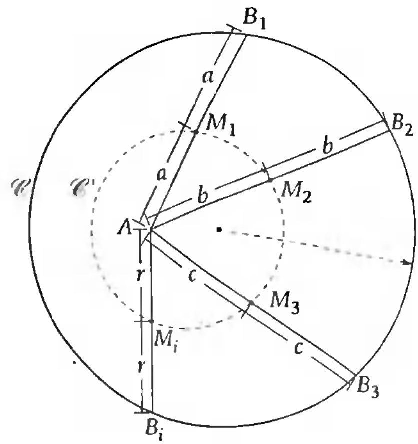
PROBLEMA N.° 10

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de un segmento, tal que uno de los extremos permanece fijo mientras el otro recorre una circunferencia dada?

A) Un segmento
B) Un punto
C) Una elipse
D) Una circunferencia
E) Un círculo

Resolución

Nos piden el lugar geométrico de los puntos medios de $\overline{AB_i}$.



M_i: punto medio de $\overline{AB_i}$; $\forall_i\in\mathbb{N}$

A: punto fijo, $B_i\in\mathscr{C}$

Notamos

$$\frac{AM_i}{AB_i}=\frac{1}{2};\quad \forall_i\in\mathbb{N}$$

$$\rightarrow\ M_i=\text{hom}\,.\,B_i\left(A;\frac{1}{2}\right)$$

Luego

$$\mathscr{C}'=\text{hom}\,.\,\mathscr{C}\left(A;\frac{1}{2}\right)$$

$\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son figuras homotécicas, por lo tanto serán semejantes.

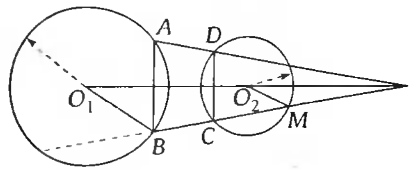
Por dato $\mathscr{C}$: circunferencia

Por lo tanto, el lugar geométrico $\mathscr{C}'$ de M_i será una circunferencia.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

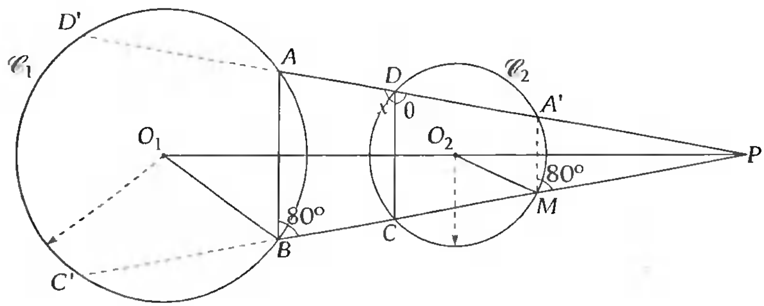
En el gráfico mostrado, m∢ABC = 80°. Calcule m∢ADC, si $\overline{O_1B}$ // $\overline{O_2M}$.



A) 80° B) 100° C) 90° D) 130° E) 140°

Resolución

Nos piden m∢ADC=x.



Dato:

$\overline{O_1B}//\overline{O_2M}$

$\triangle O_1BP$=hom. $\triangle O_2MP(P;\ r)$

Donde $r=\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{PB}{PM}$

Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{A'M}$ serán homotécicas respecto a P, entonces $\overline{A'M}//\overline{AB}$

m∢$A'MP$=m∢ABP=80°

⏢$CDA'M$: inscrito en $\mathscr{C}_2$, entonces $\theta=80°$; pero en D $x+\theta=180°$

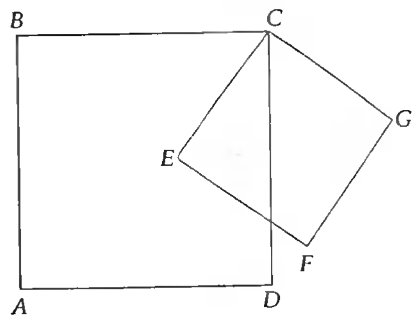
$\therefore\ x=100°$

Clave **B**

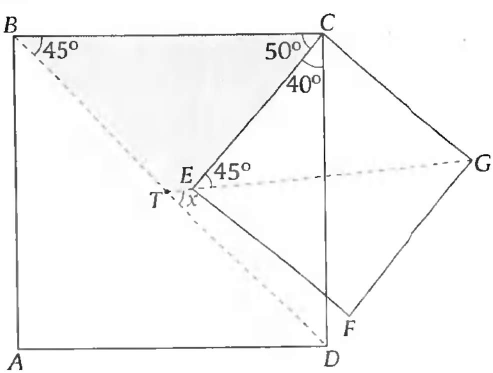
PROBLEMA N.° 12

En el gráfico se muestran los cuadrados $ABCD$ y $CEFG$. Si $m\sphericalangle ECD=40°$, calcule la medida del ángulo que determinan $\overline{EG}$ y $\overline{BD}$.

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 45°
E) 65°



Resolución



Nos piden $m\sphericalangle(\overline{EG};\overline{BD})=\theta$

$ABCD$ y $CEFG$ son cuadrados, entonces

$m\sphericalangle DBC=m\sphericalangle GEC=45°$

Dato:

$m\sphericalangle ECD=40°$, entonces

$m\sphericalangle ECB=50°$

Del ⌓$BCET$: $45°+50°=x+45°$

$\therefore\ x=50°$

Clave **B**

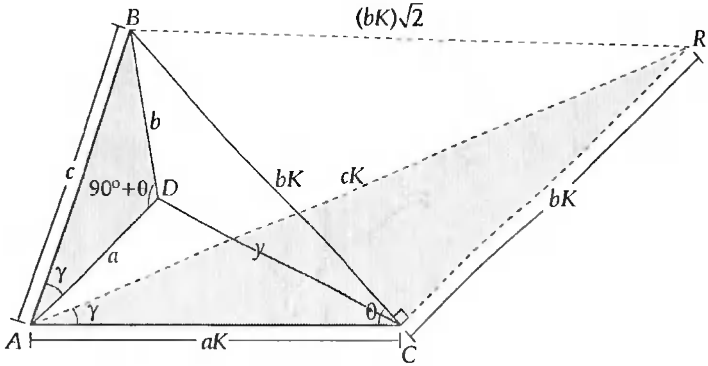
PROBLEMA N.° 13

Sea ABC un triángulo acutángulo y D un punto en su interior, tal que $(AC)(BD)=(AD)(BC)$ y $m\sphericalangle ADB=90°+m\sphericalangle ACB$, determine $\dfrac{(AB)(CD)}{(AC)(BD)}$.

A) 1
B) 2
C) 4
D) $\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{2}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{(AB)(CD)}{(AC)(BD)}$.



Dato: $(AC)(BD)=(AD)(BC)$

Sea: $AD=a$ y $BD=b$

$\rightarrow$ $AC=aK$ y

$BC=bK$

Por dato: $m\measuredangle ADB=90°+m\measuredangle ACB$

Se ubica R, exterior y relativo a $\overline{BC}$, tal que $CR=BC$ y $m\measuredangle BCR=90°$

$\triangle BCR$: $BR=(BC)\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $BR=(bK)\sqrt{2}$

$\triangle ACR \sim \triangle ADB$: $\dfrac{AR}{AB}=\dfrac{AC}{AD}=K$

$\triangle ADC \sim \triangle ABR$:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BR}{DC}$$

$$\rightarrow \quad \frac{(AB)(CD)}{(AD)(BR)}=1$$

Reemplazamos

$$\frac{(AB)(CD)}{\left(\dfrac{AC}{K}\right)\left[K\sqrt{2}(BD)\right]}=1$$

$$\therefore \quad \frac{(AB)(CD)}{(AC)(BD)}=\sqrt{2}$$

Clave **D**

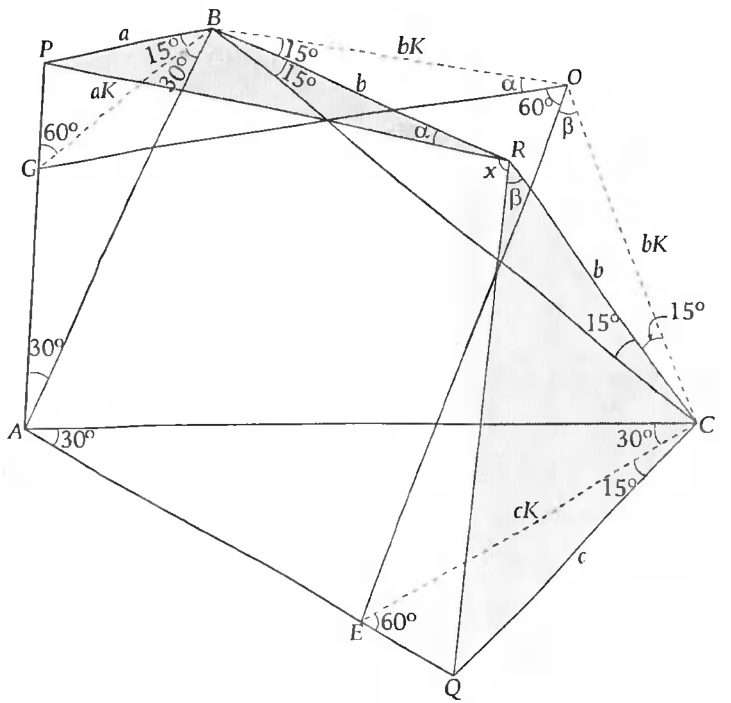
PROBLEMA N.° 14

Sea el triángulo ABC, exteriormente a los lados AB y AC se construyen los triángulos APB y AQC, tales que $m\measuredangle ABP=m\measuredangle ACQ=45°$ y $m\measuredangle BAP=m\measuredangle CAQ=30°$. Si exteriormente al lado BC se construye el triángulo RBC, tal que $m\measuredangle BCR=m\measuredangle CBR=15°$, calcule la $m\measuredangle PRQ$.

A) 80° B) 60° C) 75° D) 90° E) 120°

Resolución

Nos piden m$\measuredangle PRQ=x$.



Se ubican O, G y R, tal que los triángulos AGB, BOC y AEC sean isósceles.

Luego, por el teorema de Napoleón: m$\measuredangle EOG=60°$

$\triangle BOC$: $\alpha+\beta=60°$ (I)

$\triangle GBO \sim \triangle PBR$: m$\measuredangle PRB=m\measuredangle GOB=\alpha$

$\triangle OEC \sim \triangle RQC$: m$\measuredangle EOC=m\measuredangle QRC=\beta$

$\triangle BRC$:

$x+\alpha+\beta=150°$ (II)

De (I) y (II)

$x=90°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 15

Dado un triángulo ABC, de baricentro G, en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que

$\overline{GM}//\overline{AC}$ y $\overline{MN}//\overline{AB}$

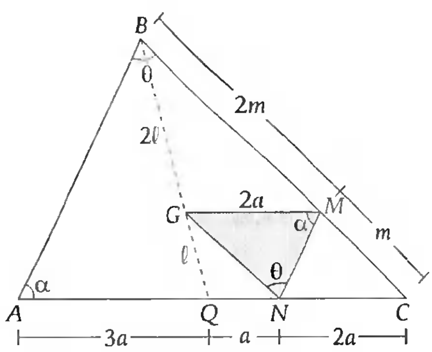
Si el perímetro de la región triangular GMN es 4 cm, señale el perímetro de la región triangular ABC.

A) 8 cm
B) 10 cm
C) 12 cm
D) 16 cm
E) 18 cm

Resolución

Nos piden

$2p_{\triangle ABC}$.



G: baricentro del $\triangle ABC$

$BG=2(GQ)$ y

$AQ=QC$ (I)

Dato:

$\overline{GM}//\overline{QC}$, entonces

$BM=2(MC)$

También

$\overline{MN}//\overline{AB}$, entonces

$AN=2(NC)$ (II)

De (I) y (II)

$$QN=\frac{NC}{2}=\frac{AQ}{3}$$

Notamos

$$\frac{QN}{NC}=\frac{QG}{GB}=\frac{1}{2} \rightarrow \overline{GN}//\overline{BC}$$

$\triangle GMN \sim \triangle CAB$

$$\frac{2p_{\triangle GMN}}{2p_{\triangle ABC}}=\frac{GM}{AC}=\frac{2\cancel{a}}{6\cancel{a}}=\frac{1}{3}$$

Dato:

$2p_{\triangle GMN}=4$ cm, entonces

$$\frac{4\text{ cm}}{2p_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ 2p_{\triangle ABC}=12$ cm

Clave **C**

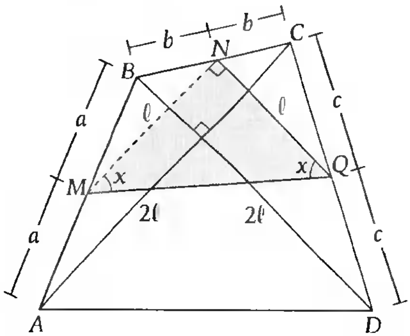
PROBLEMA N.° 16

Sean M, N y Q puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si $ABCD$ es un cuadrilátero de diagonales perpendiculares y congruentes, indique m$\sphericalangle MQN$.

A) 45°
B) 60°
C) 30°
D) 90°
E) 135°

Resolución

Nos piden m$\measuredangle MQN = x$.



Por dato, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son congruentes y perpendiculares, entonces

$AC = BD = 2\ell$ y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{MN}$: base media del $\triangle ABC$

$\overline{NQ}$: base media del $\triangle BCD$

$$\rightarrow \quad MN = \frac{AC}{2} = \ell \quad y \quad NQ = \frac{BD}{2} = \ell$$

$\overline{MN} // \overline{AC}$ y $\overline{NQ} // \overline{BD}$, entonces

m$\measuredangle MNQ = 90°$

$\triangle MNQ$: $2x = 90°$

$\therefore \; x = 45°$

Clave **A**

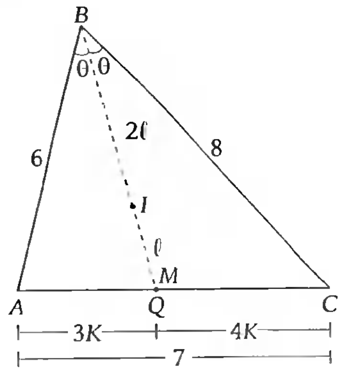
PROBLEMA N.° 17

Se sabe que ABC es un triángulo de incentro I, $AB=6$, $BC=8$ y $AC=7$. Calcule $CM-AM$, si M es el homotético de I, con centro en B y razón 3/2. M=hom. I (B; 1,5).

A) 0,3 B) 0,5 C) 0,8
D) 2 E) 1

Resolución

Nos piden $CM-AM$.



Dato:

I es el incentro del $\triangle ABC$

M=hom. I (B; 1,5)

Entonces

$$\frac{BM}{BI} = 1{,}5 \quad \text{o} \quad BI = 2(IM) \qquad \text{(I)}$$

Por teorema del incentro

$$\frac{BI}{IQ} = \frac{6+8}{7} = 2$$

$$BI = 2(IQ) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II): M y Q coinciden

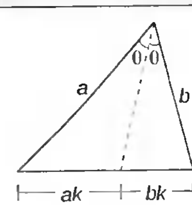
$CM - AM = CQ - AQ = 4K - 3K$

$CM - AM = K$

$AC = 7K = 7 \;\rightarrow\; K = 1$

$\therefore \; CM - AM = 1$

Nota



Clave **E**

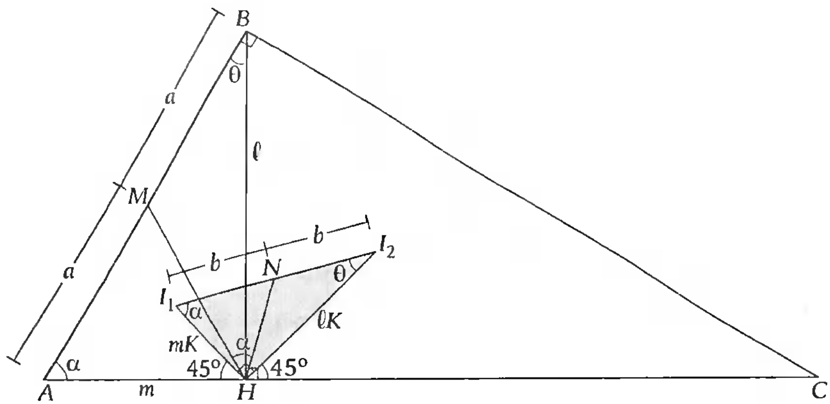
PROBLEMA N.° 18

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH. Si I_1 e I_2 son los incentros de ABH y HBC; M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{I_1I_2}$, respectivamente, calcule m$\sphericalangle MHN$.

A) 45° B) 53° C) 37° D) 60° E) 90°

Resolución

Nos piden m$\sphericalangle MHN=\alpha$.



$\triangle AHB \sim \triangle BHC$

$$\frac{I_1H}{I_2H}=\frac{AH}{BH}=\frac{m}{\ell} \rightarrow I_1H=mK;\ \ I_2H=\ell K$$

Luego, podemos decir que el $\triangle AHB$ se podrá transformar en el $\triangle I_1HI_2$, aplicando una rotación alrededor de H con un ángulo de rotación de 45° y luego una homotecia respecto a H, con una razón igual a K.

Dato:

$AM=MB$ y $I_1N=I_2N$

M y N serán puntos homotécicos a partir del producto de dichas transformaciones.

Entonces

m$\sphericalangle MHN$=m$\sphericalangle$rotación

$\therefore$ m$\sphericalangle MHN=45°$

Clave **A**

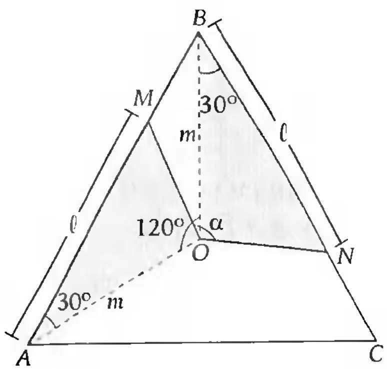
PROBLEMA N.° 19

Dado un triángulo equilátero ABC, de centro O, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente. Si $AM=BN$, señale la m$\sphericalangle MON$.

A) 90° B) 60°
C) 120°
D) 135° E) 108°

Resolución

Nos piden m$\sphericalangle MON$.



Por dato: O es el centro del triángulo equilátero ABC.

Entonces

$OA=OB=m$ y m$\sphericalangle AOB=120°$

Además

m$\sphericalangle OAM$=m$\sphericalangle OBN=30°$

Notamos

$\triangle OBN$=rot. $\triangle OAM(O;\ \alpha)$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle MON$=m$\sphericalangle AOB$

$\therefore\ \alpha=120°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

En un triángulo ABC (escaleno), de circunradio R, las alturas AM y BN se intersecan en P. Si L es punto medio de $\overline{CP}$, señale el circunradio del triángulo MNL.

A) R

B) $\frac{R}{3}$

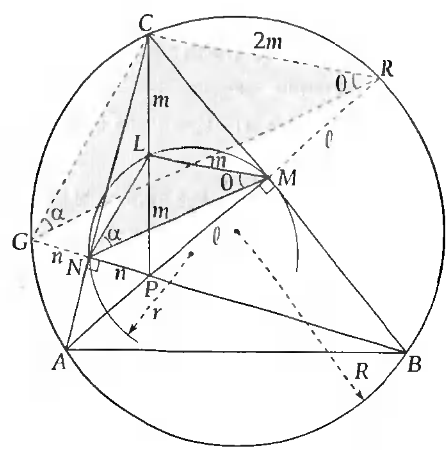
C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{2R}{3}$

E) $\frac{R}{2}$

Resolución

Nos piden r, circunradio del $\triangle MNL$.



No es necesario recurrir a la circunferencia de los nueve puntos para resolver al problema, veamos:

P: ortocentro del $\triangle ABC$

Entonces

$$GN=NP \quad \text{y} \quad PM=MR$$

$$\overline{NL}//\overline{GC},\ \overline{LM}//\overline{CR} \text{ y } \overline{NM}//\overline{GR}$$

$\triangle RGC \sim \triangle MNL$

$$\frac{r}{R}=\frac{LM}{CR}$$

$$\frac{r}{R}=\frac{\cancel{m}}{2\cancel{m}}$$

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad r=\frac{R}{2}$$

Clave **E**

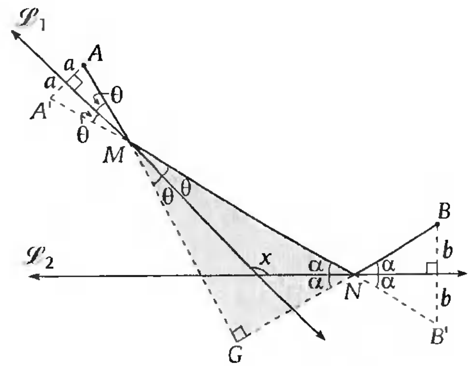
PROBLEMA N.° 21

Un segmento AB se encuentra en una de las regiones determinadas por las rectas secantes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ (A y B no pertenecen a ninguna de las rectas).
En $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que $\overline{MN}$ se encuentra en la misma región del $\overline{AB}$. Cuando $AM+MN+NB$ es mínimo, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son perpendiculares, calcule la medida del ángulo que determinan $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ ($\overline{AM} \cap \overline{BN}=\phi$).

A) 90°
B) 100°
C) 120°
D) 135°
E) 145°

Resolución

Nos piden x.



Por condición del problema, $AM+MN+NB$ debe ser mínimo.

Para determinar los puntos M y N en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ se deberá trazar $\overline{A'B'}$, donde

A': simétrico de A respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$
B': simétrico de B respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

Dato:

$$\overline{AM} \perp \overline{BN}$$

$$\rightarrow \quad m\sphericalangle AGB=90°$$

En el $\triangle MGN$

$$x=90°+\frac{m\sphericalangle MGN}{2}$$

$$x=90°+\frac{90°}{2}$$

$$\therefore \quad x=135°$$

Clave **D**

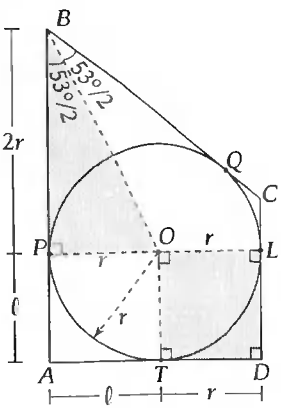
PROBLEMA N.° 22

En un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia, la medida de los ángulos interiores en B y D son, respectivamente, 53° y 90°. Si $AB-AD=3$ cm, calcule el radio de la circunferencia inscrita en $ABCD$.

A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm
D) $3\sqrt{2}$ cm E) $4\sqrt{2}$ cm

Resolución

Nos piden r.



Dato:

$m\measuredangle ABC=53°$

$m\measuredangle ADC=90°$

$AB-AD=3$ cm (I)

Sean P, Q, L y T puntos de tangencia, entonces $m\measuredangle PBO=m\measuredangle OBQ$

$$m\measuredangle PBO=\frac{53°}{2}$$

$PB=2(OP)=2r$;

$TD=OL=r$

Además

$AP=AT$

$AP=\ell$

Reemplazamos en (I)

$(\ell+2r)-(\ell+r)=3$ cm

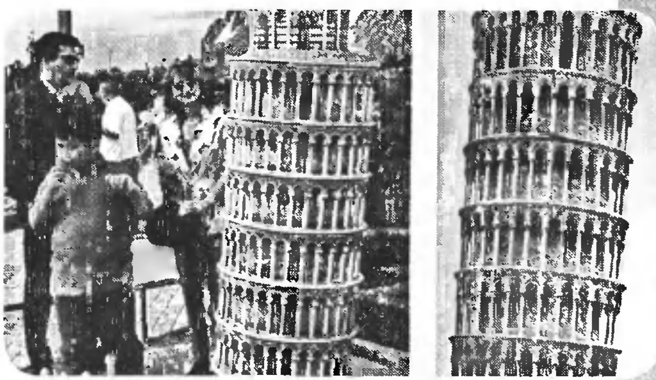
$\therefore\ r=3$ cm

Clave **A**

Capítulo

14

Semejanza de figuras



La teoría de semejanza no solo se asocia a los triángulos sino también a los polígonos en general, así como a los sólidos. La teoría de semejanza es aplicada desde hace varios años directamente en la geografía, con la triangulación de terrenos (relacionado al curso de agrimensura), y en la arquitectura, con el empleo de maquetas mediante el diseño a escala. Además, esta teoría se emplea en temas de seguridad con programas computarizados y en el arte.

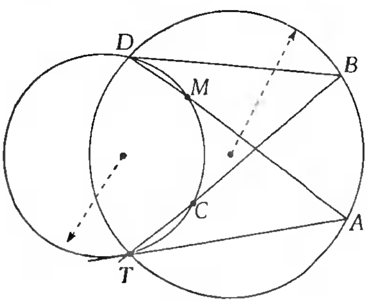
Los problemas resueltos en este capítulo hacen uso de los teoremas de la semejanza de triángulos y su generalización para polígonos, así como de casos particulares asociados con la semejanza.

Capítulo 14

Semejanza de figuras

PROBLEMA N.° 1

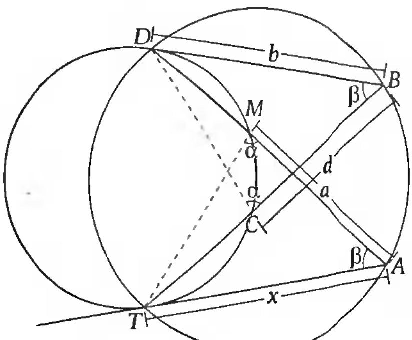
Según el gráfico, $AM=a$, $BD=b$ y $BC=d$. Calcule AT, si T es punto de tangencia.



A) ad/b B) bd/a C) $(a+d)/b$
D) $(a+b)/d$ E) ab/d

Resolución

Nos piden $AT=x$.



Por teorema del ángulo exinscrito

$$m\sphericalangle TMA=\frac{m\overset{\frown}{TD}}{2}=\alpha$$

$$m\sphericalangle DCB=\frac{m\overset{\frown}{TD}}{2}=\alpha$$

Datos: $AM=a$; $BD=b$ y $BC=d$

$\triangle DCB\cong\triangle TMA$:

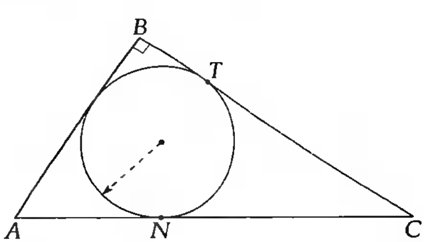
$$\frac{x}{b}=\frac{a}{d}$$

$$\therefore\ x=\frac{ab}{d}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 2

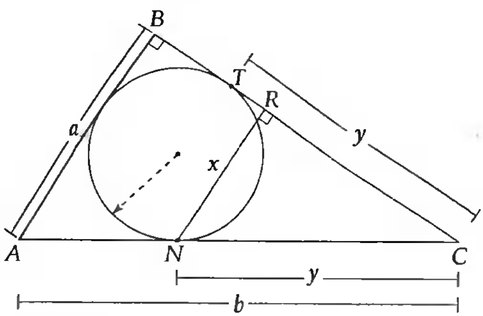
Según el gráfico, si T y N son puntos de tangencia y $(AB)(TC)=K(AC)$, calcule la distancia de N a $\overline{BC}$.



A) $K/2$ B) $K/3$ C) $2K/3$
D) K E) $2K$

Resolución

Nos piden $NR=x$.



Dato:

$$(AB)(TC)=K(AC)$$

$\rightarrow\ ay=Kb$ (I)

$\triangle ABC \sim \triangle NRC$:

$$\rightarrow\ \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$

$ay=xb$ (II)

De (I) y (II)

$Kb=xb$

$\therefore\ x=K$

Clave **D**

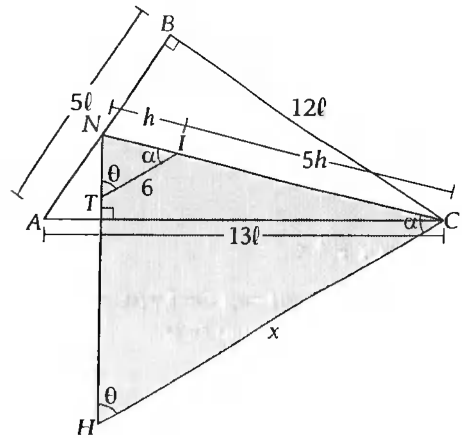
PROBLEMA N.° 3

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{CN}$; luego, se traza $\overline{NH}\perp\overline{AC}$. Si en $\overline{NH}$ se ubica el punto T, tal que $\overline{TI}//\overline{HC}$ (I es incentro del triángulo ABC); $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{12}$ y $TI=6$, halle HC.

A) 30 B) 34 C) 36
D) 42 E) 46

Resolución

Nos piden $HC=x$.



Dato:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{5}{12}$$

Luego

$AB=5\ell\ \rightarrow\ BC=12\ell$

En el $\triangle ABC$

$$(AC)^2=(5\ell)^2+(12\ell)^2$$

$\rightarrow\ AC=13\ell$

Por teorema del incentro en el $\triangle ABC$

$$\frac{CI}{IN}=\frac{BC+AC}{AB}=\frac{25\ell}{5\ell}=5$$

$\rightarrow\ CI=5(IN)$

Dato:

$\overline{TI}//\overline{HC}$ y $TI=6$

$\triangle TNI \sim \triangle HNC$

$$\frac{6}{x}=\frac{h}{6h}$$

$\therefore\ x=36$

Clave **C**

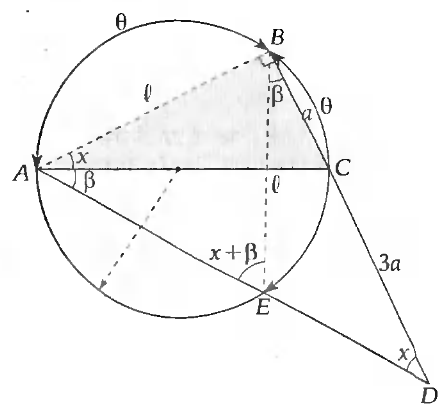
PROBLEMA N.° 4

En una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y E, tal que $\overline{AC}$ sea diámetro, $m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BCE}$, $\overleftrightarrow{BC}\cap\overrightarrow{AE}=\{D\}$ y $CD=3(BC)$. Señale $m\sphericalangle ADB$.

A) 37° B) 37°/2 C) 22°30'
D) 30° E) 53°/2

Resolución

Nos piden $m\sphericalangle ADB=x$.



Dato:

$m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BCE}$

Entonces

$AB=BE=\ell$

$m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle ADB \rightarrow (AB)^2=(BC)(BD)$

Reemplazamos

$\ell^2=(a)(4a) \rightarrow \ell=2a$

En el ⊿ABC

$$\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{53°}{2}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 5

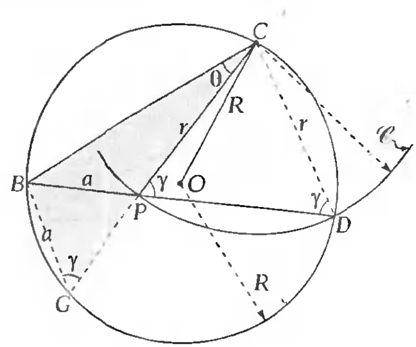
En una circunferencia de centro O se ubican los puntos consecutivos B, C y D, con centro en C y radio $\overline{CD}$ se traza el arco de circunferencia $\mathscr{C}$, de modo que $\overline{BD}\cap\mathscr{C}=\{P\}$. Si $BP=a$ y $m\sphericalangle BCP=\theta$, calcule OC.

A) $a\operatorname{sen}\theta$ B) $\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta$ C) $a\tan\theta$

D) $\frac{a}{2}\csc\theta$ E) $a\cot\theta$

Resolución

Nos piden $OC=R$.



Datos:

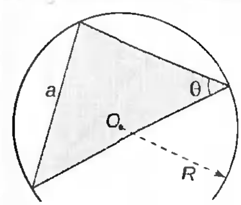
$BP=a$ y $m\sphericalangle BCP=\theta$

$CP=CD=r \rightarrow m\sphericalangle CPD=m\sphericalangle CDP=\gamma$

En el △GBP

$BG=BP=a$

Nota



Teorema:
$a=2R\operatorname{sen}\theta$

Del $\triangle GBC$

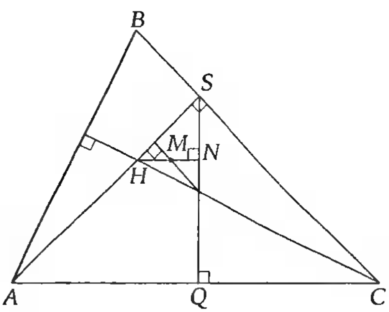
$a=2R\operatorname{sen}\theta$

$\therefore\ R=\dfrac{a}{2}\csc\theta$

Clave D

PROBLEMA N.° 6

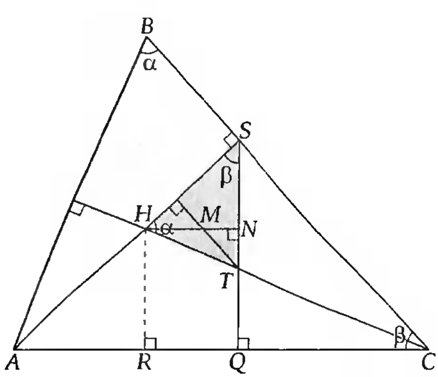
En el gráfico, $\dfrac{HS}{BC}=\ell$. Calcule $\dfrac{MN}{NQ}$.



A) ℓ B) $\ell/2$ C) 2ℓ
D) $2/3$ E) $3\ell/2$

Resolución

Nos piden $\dfrac{MN}{NQ}$.



Dato: $\dfrac{HS}{BC}=\ell$

H: ortocentro del $\triangle ABC$
M: ortocentro del $\triangle HST$

$\triangle ABC \sim \triangle THS$: $\dfrac{HR}{MN}=\dfrac{BC}{HS}$

Pero $HR=NQ$ $\rightarrow$ $\dfrac{NQ}{MN}=\dfrac{BC}{HS}=\dfrac{1}{\ell}$

$\therefore\ \dfrac{MN}{NQ}=\ell$

Clave A

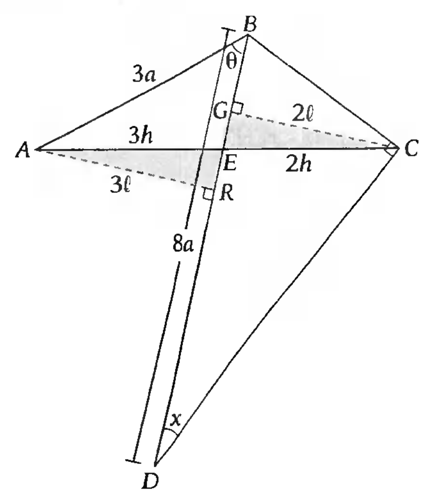
PROBLEMA N.° 7

En un triángulo ABC se traza el triángulo rectángulo BCD recto en C, donde $8(AB)=3(BD)$. Si E es el punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, además $\dfrac{AE}{3}=\dfrac{EC}{2}$, calcule el mayor valor de m$\sphericalangle CDB$.

A) 75° B) 60° C) 45°
D) 15° E) 37°

Resolución

Nos piden $x_{\text{máximo}}$.



Dato:

$$8(AB)=3(BD);\ \frac{AE}{3}=\frac{EC}{2}$$

$\triangle ARE \sim \triangle CGE$:

$$\frac{AR}{GC}=\frac{3\cancel{K}}{2\cancel{K}}=\frac{3}{2};\ AR < AB$$

Luego

$$3\ell < 3a \ \rightarrow\ \frac{\ell}{a}<1$$

$$\frac{CG}{BD}=\frac{2\ell}{8a}=\frac{1}{4}\left(\frac{\ell}{a}\right)\ \rightarrow\ \frac{CG}{BD}<\frac{1}{4} \qquad \text{(I)}$$

Para ello hemos asumido

$$\theta < 90^\circ$$

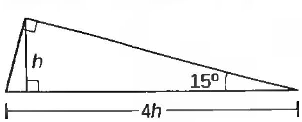
Pero si

$$\theta=90^\circ\ \rightarrow\ \frac{\ell}{a}=1$$

Luego

$$\frac{CG}{BD}=\frac{1}{4} \qquad \text{(II)}$$

Nota



En general, de (I) y (II)

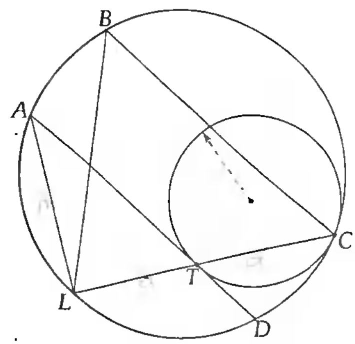
$$\frac{CG}{BD}\leq\frac{1}{4}\ \rightarrow\ x\leq 15^\circ$$

$\therefore\ x_{\text{máximo}}=15^\circ$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

En el gráfico, C y T son puntos de tangencia. Si $\overline{BC}//\overline{AD}$, $CT=TL$ y $AL=n$, señale LB.

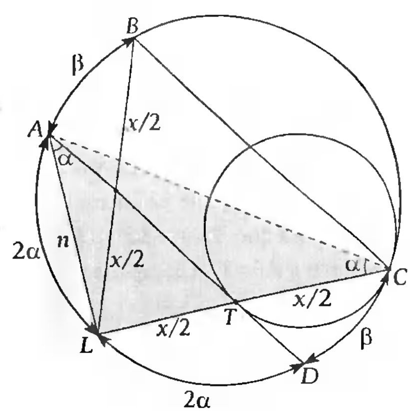


A) $n\sqrt{3}$ B) $n/2$ C) $2n$

D) $n\sqrt{2}$ E) n

Resolución

Nos piden $LB=x$.



Dato

$$\overline{BC}//\overline{AD}$$

Entonces

$$m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{CD}=\beta$$

C y T: puntos de tangencia

Luego, por teorema

$$m\widehat{AL} = m\widehat{LD} = 2\alpha$$

$$m\widehat{LB} = m\widehat{LC}\text{, entonces}$$

$$LC=LB=x$$

Dato:

$$LT=TC$$

Por teorema en el $\triangle LAC$

$$(LA)^2=(LT)(LC)$$

Reemplazando

$$n^2=\left(\frac{x}{2}\right)(x)$$

$$\therefore\ x=n\sqrt{2}$$

Clave D

PROBLEMA N.° 9

En un cuadrado $ABCD$ se ubica el punto P exterior relativo a BC, de tal manera que $m\sphericalangle BPC=90°$. Si luego se ubica un punto M en $\overline{AD}$, de manera que $\overline{PM}$ interseca a $\overline{BC}$ en S, $BS=MD=3$ cm y $AB=2(PC)$, calcule PS.

A) 3 cm

B) 2 cm

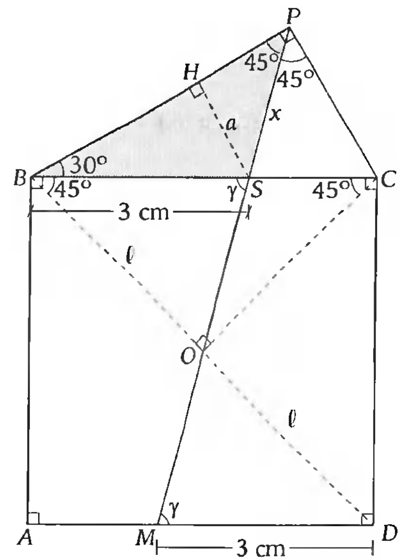
C) 6 cm

D) $3\sqrt{2}$ cm

E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

Resolución

Nos piden $PS=x$.



Por dato: $BS=MD=3$ cm

$\triangle BSO \cong \triangle DMO$ (A. L. A.)

$BO=OD \ \rightarrow\ O$: centro del cuadrado $ABCD$.

$\square BPCO$: inscriptible, entonces

$$m\sphericalangle BPO=m\sphericalangle BCO=45°$$

Se traza $\overline{SH} \perp \overline{BP}$

$\triangle PHS$: notable de 45°

$$HS=a \ \rightarrow\ x=a\sqrt{2}$$

$\triangle BHS$: notable de 30° y 60°

$$BS=3\text{ cm} \ \rightarrow\ a=\frac{3}{2}\text{cm}$$

$$\therefore\ x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ cm}$$

Clave E

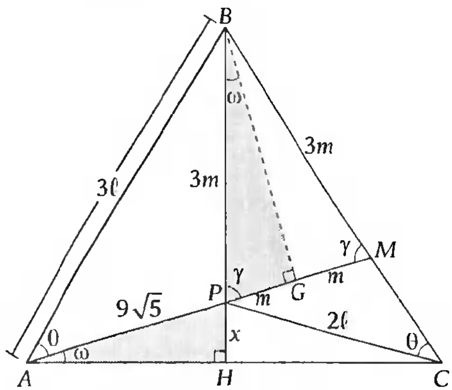
PROBLEMA N.° 10

En un triángulo ABC se trazan la altura BH y la ceviana interior AM, las cuales se intersecan en P. Si $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle MCP$, $BP=BM$, $2(AB)=3(PC)$ y $AP=9\sqrt{5}$, calcule PH.

A) 3 B) 6 C) 9
D) $3\sqrt{5}$ E) $6\sqrt{5}$

Resolución

Nos piden $PH=x$.



$BP=BM \rightarrow m\sphericalangle BPM = m\sphericalangle BMP = \gamma$

Por dato: $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle MCP$

Luego, $\triangle APB \sim \triangle CMP$

$$\frac{MP}{BP} = \frac{PC}{AB}$$

Dato: $\dfrac{PC}{AB} = \dfrac{2}{3}$

Si $PM=2m \rightarrow BP=3m$

$⊿BGP \sim ⊿PHA$

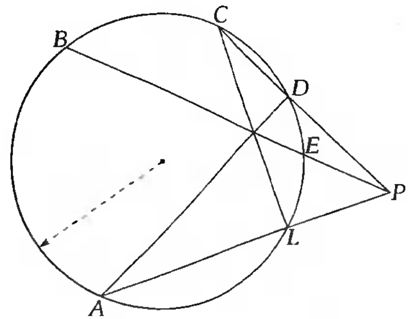
$$\frac{x}{9\sqrt{5}} = \frac{m}{3m}$$

$\therefore\ x = 3\sqrt{5}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

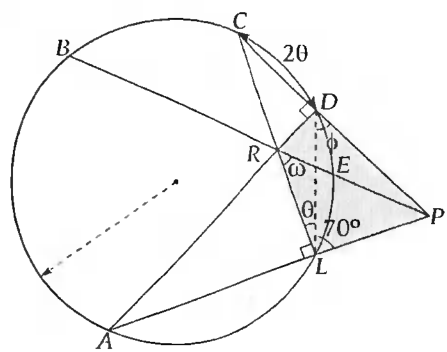
En el gráfico, $m\widehat{BC} = m\widehat{CE}$ y $m\widehat{DLA} = 140°$. Indique $m\widehat{CD}$.



A) 80° B) 70° C) 40°
D) 30° E) 20°

Resolución

Nos piden $m\widehat{CD} = 2\theta$.



$m\widehat{DLA} = 140°$

Por teorema del ángulo exinscrito

$$m\sphericalangle DLP = \frac{m\widehat{DLA}}{2} \rightarrow m\sphericalangle DLP = 70°$$

$$m\widehat{BC} = m\widehat{CE} \rightarrow m\widehat{BC} + m\widehat{EL} = m\widehat{CE} + m\widehat{EL}$$

De ese modo: $2\omega=2\phi \rightarrow \omega=\phi$

$\square LRDP$ será inscriptible.

$m\measuredangle ALR=m\measuredangle CDR=90°$, entonces $\theta+70°=90°$

$m\measuredangle ALC+m\measuredangle RDC=180°$, entonces $\theta=20°$

$\therefore\ m\overset{\frown}{CD}=40°$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

En el gráfico, $m\measuredangle DCB=\dfrac{m\measuredangle CBO}{2}$, $OL=3$ y $AB=5$. Indique r.

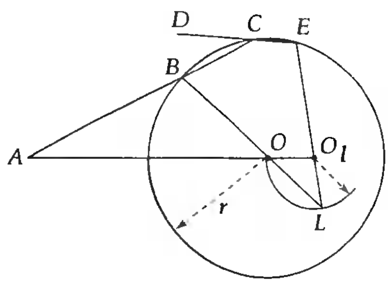
A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

B) 4

C) $2\sqrt{2}$

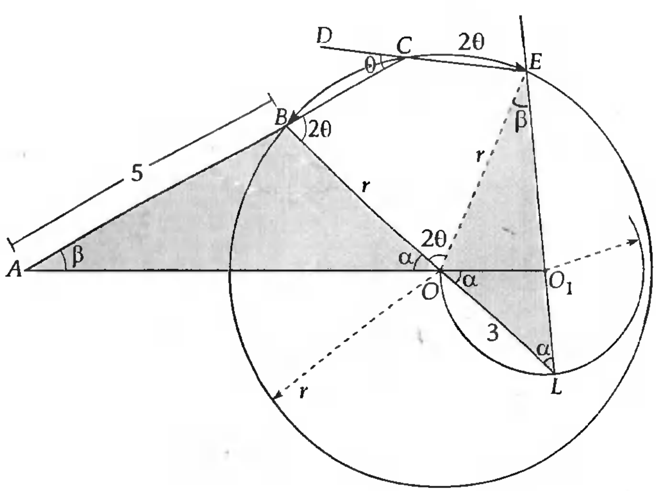
D) $\sqrt{15}$

E) $\sqrt{17}$



Resolución

Nos piden r.



Datos:

$AB=5$; $OL=3$

$m\measuredangle DCB=\dfrac{m\measuredangle CBO}{2}=\theta$

Por teorema del ángulo exinscrito

$$m\widehat{BE}=2(m\sphericalangle DCB)=2\theta$$

Por teorema del ángulo central

$$m\sphericalangle EOB=m\widehat{BE}=2\theta$$

$\triangle LEO \sim \triangle OAB$

$$\frac{r}{5}=\frac{3}{r}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{15}$$

Clave **D**

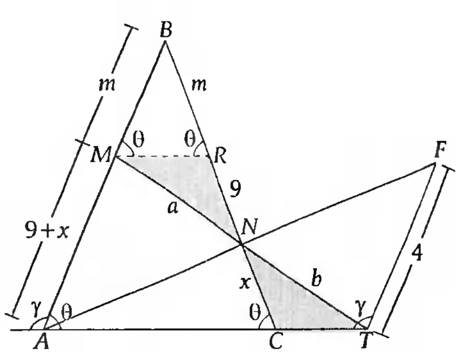
PROBLEMA N.° 13

Dado un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$), en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, en la prolongación de $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican los puntos M, N, T y F, respectivamente, tal que $\overline{MT}\cap\overline{AF}=\{N\}$. Si $m\sphericalangle FTC+m\sphericalangle BAC=180°$, $BN-MB=9$ y $FT=4$, indique NC.

A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 6

Resolución

Nos piden $NC=x$.



Datos: $AB=BC$ y $BN-MB=9$

Trazamos $\overline{MR}//\overline{AC}$, entonces

$$MB=BR=m \text{ y } NR=9$$

$\square AMRC$: trapecio isósceles

$$AM=RC=9+x$$

$$\triangle MRN \sim \triangle TCN:\ \frac{9}{x}=\frac{a}{b} \qquad \text{(I)}$$

$$m\sphericalangle FTC+m\sphericalangle BAC=180°$$

$$\rightarrow\ \gamma+\theta=180°$$

Luego, $\overline{AM}//\overline{TF}$

$$\triangle AMN \sim \triangle FTN:\ \frac{9+x}{4}=\frac{a}{b} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

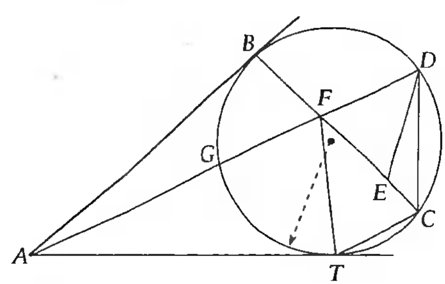
$$\frac{9+x}{4}=\frac{9}{x}$$

$$\therefore\ x=3$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

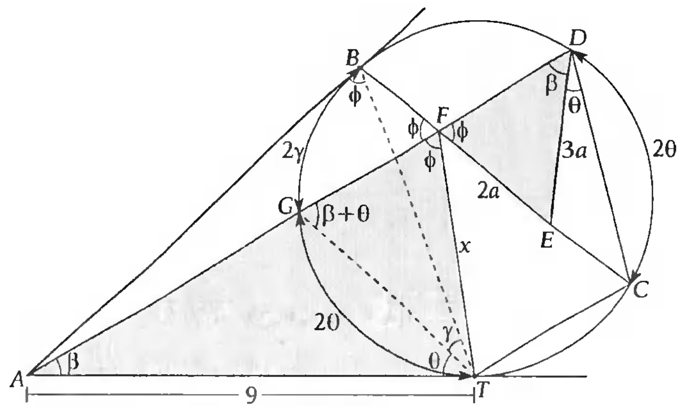
En el gráfico, $\overline{DG}//\overline{TC}$. Si B y T son puntos de tangencia, $2(DE)=3(FE)$, $m\widehat{TG}=2(m\sphericalangle EDC)$ y $AT=9$, halle FC.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Nos piden $FC=x$.



$\overline{GD}//\overline{TC} \rightarrow \text{m}\widehat{GT}=\text{m}\widehat{DC}=2\theta$

Por teorema del ángulo interior

$\text{m}\measuredangle BFG=\dfrac{\text{m}\widehat{BG}+\text{m}\widehat{DC}}{2}$, entonces $\phi=\gamma+\theta$

$\text{m}\measuredangle AFB=\text{m}\measuredangle ATB$, entonces el ⏢$ABFT$ será inscriptible.

$\text{m}\measuredangle AFT=\text{m}\measuredangle ABT=\phi$

⏢$GTCD$: trapecio isósceles, entonces $\text{m}\measuredangle FDC=\text{m}\measuredangle FGT=\beta+\theta$

$\triangle AFT \sim \triangle DFE$: $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{9}{3a}$

$\therefore\ x=6$

Clave **C**

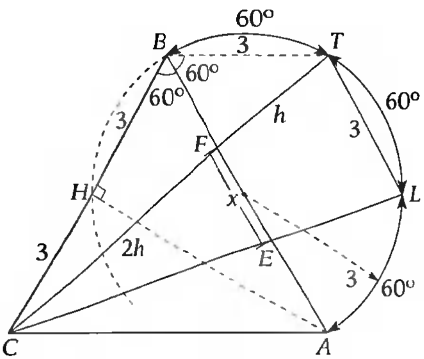
PROBLEMA N.° 15

En un triángulo equilátero ABC se traza exteriormente la semicircunferencia de diámetro AB, donde se ubican los puntos L y T, tal que $\text{m}\widehat{AL}=\text{m}\widehat{LT}=\text{m}\widehat{BT}$, $\overline{AB}\cap\overline{LC}=\{E\}$, $\overline{AB}\cap\overline{TC}=\{F\}$ y $AB=6$. Indique EF.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución

Nos piden $EF=x$.



$m\widehat{AL}=m\widehat{LT}=m\widehat{TB}=60°$

$AB=6$

$\rightarrow\ BT=TL=3$

$\overline{AB}$: diámetro, entonces

$m\sphericalangle AHB=90°$

$\triangle ABC$: equilátero, entonces

$HC=HB=3$

Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle CBT$

$$\frac{CF}{FT}=\frac{CB}{BT}=\frac{6}{3}=2$$

Si $FT=h$

$\rightarrow\ CF=2h$

$m\widehat{BT}=m\widehat{AL}\ \rightarrow\ \overline{AB}//\overline{TL}$

$\triangle CFE\sim\triangle CTL$

$$\frac{x}{3}=\frac{2h}{3h}$$

$\therefore\ x=2$

Clave C

PROBLEMA N.° 16

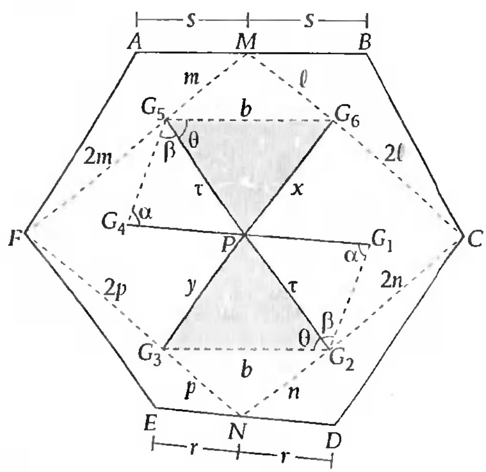
En un hexágono $ABCDEF$ se ubican los baricentros G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 y G_6 de los triángulos BCD, CDE, DEF, EFA, FAB y ABC, respectivamente.

Si $\overline{G_1G_4}\cap\overline{G_2G_5}=\{P\}$, calcule $\frac{G_6P}{G_3P}$.

A) 2 B) 1 C) 3/2
D) 2/3 E) 4/3

Resolución

Nos piden $\frac{G_6P}{G_3P}=\frac{x}{y}$.



$\triangle FMC\sim\triangle G_5MG_6$

$$\frac{G_5G_6}{FC}=\frac{m}{3m};\quad G_5G_6=\frac{FC}{3}\qquad\text{(I)}$$

$\triangle FNC\sim\triangle G_3NG_2$

$$\frac{G_3G_2}{FC}=\frac{p}{3p};\quad G_3G_2=\frac{FC}{3}\qquad\text{(II)}$$

De (I) y (II)

$\overline{G_5G_6}$ y $\overline{G_3G_2}$ serán congruentes y paralelos.

$m\sphericalangle G_6G_5P=m\sphericalangle G_3G_2P=\theta$ y $G_5G_6=G_3G_2=b$

De igual modo

$G_4G_5=G_1G_2$ y $\overline{G_4G_5}//\overline{G_2G_1}$

$\triangle PG_4G_5 \cong \triangle PG_1G_2$ (A. L. A.), entonces

$G_5P=PG_2=\tau$

$\triangle G_5PG_6 \cong \triangle G_2PG_3$ (L. A. L.)

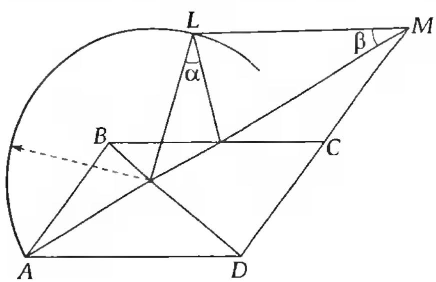
$G_6P=PG_3 \rightarrow x=y$

$\therefore \dfrac{x}{y}=1$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

En el gráfico, $ABCD$ es un romboide. Halle α/β.

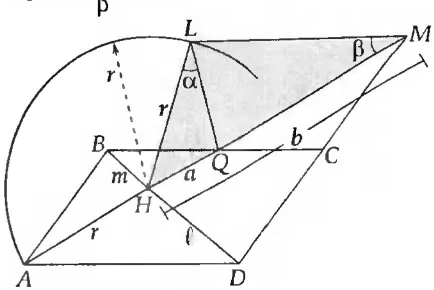


A) 1/2 B) 2 C) 1

D) 3/2 E) 4/3

Resolución

Nos piden $\dfrac{\alpha}{\beta}$.



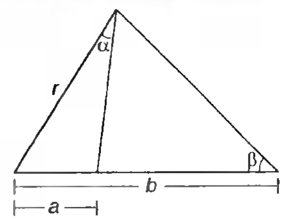
$\square ABCD$: romboide

De acuerdo al teorema de Tales, se tendrá:

$\overline{BQ}//\overline{AD} \rightarrow \dfrac{m}{\ell}=\dfrac{a}{r}$ (I)

$\overline{AB}//\overline{DM} \rightarrow \dfrac{m}{\ell}=\dfrac{r}{b}$ (II)

Nota



Si $r^2=ab \rightarrow \alpha=\beta$

De (I) y (II)

$\dfrac{a}{r}=\dfrac{r}{b} \rightarrow r^2=ab$

Luego: $\alpha=\beta$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=1$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

En el gráfico, C y D son puntos de tangencia. Si $AE=a$ y $OC=b$, calcule r.

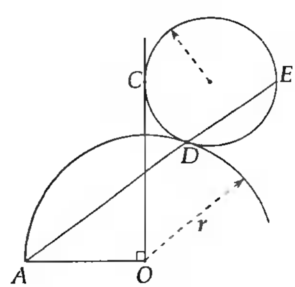
A) $\dfrac{ab}{a+b}$

B) $\dfrac{ab}{a-b}$

C) $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

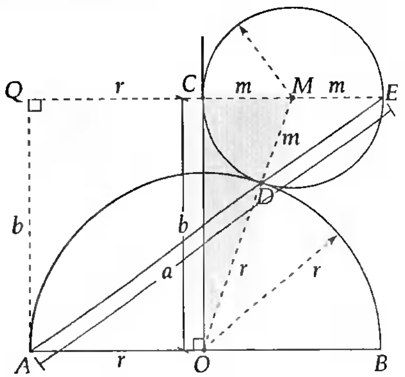
D) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

E) $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$



Resolución

Nos piden r.



Datos:

$AE=a$ y $CO=b$

D: punto de tangencia

Entonces O, D y M serán colineales.

Se traza: $\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{CE}$; $QC=AO=r$

Por teorema de Pitágoras

En el ⊿AQE

$$a^2-b^2=(r+2m)^2$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{a^2-b^2}=r+2m \qquad \text{(I)}$$

En el ⊿MCO

$$b^2=(r+m)^2-m^2$$

$$\rightarrow \quad b^2=r(r+2m) \qquad \text{(II)}$$

De (II) ÷ (I)

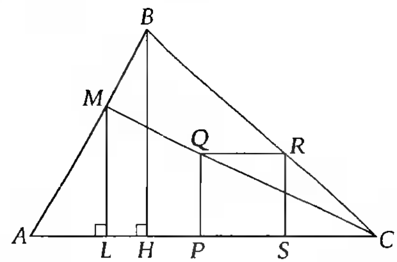
$$\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{r\cancel{(r+2m)}}{\cancel{(r+2m)}}$$

$$\therefore \quad r=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Según el gráfico, $PQRS$ es un cuadrado. Si $AC=a$ y $BH=b$, calcule ML.

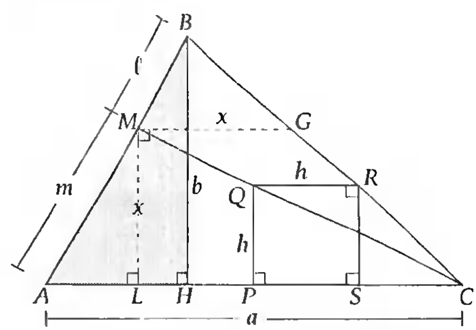


A) $\sqrt{ab}$ B) $a-b$ C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\dfrac{(a+b)}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

Resolución

Piden $ML=x$.



□$PQRS$: cuadrado ($PQ=QR=h$)

Se ubica G en $\overline{BC}$ de manera que m∢LMG=90°

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{QP}{ML}=\frac{CQ}{CM} \rightarrow \frac{h}{x}=\frac{CQ}{CM}=\frac{QR}{MG}$$

$$\frac{h}{x}=\frac{QR}{MG} \quad \rightarrow \quad MG=x$$

$\triangle ABC \sim \triangle MBG$: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{\ell}{\ell+m}$ (I)

⊿$ALM \sim$ ⊿AHB: $\dfrac{x}{b}=\dfrac{m}{m+\ell}$ (II)

De (I) + (II)

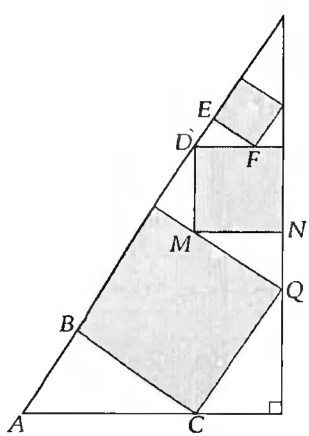
$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$$

$$\therefore \quad x=\frac{ab}{a+b}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

Según el gráfico, las regiones sombreadas están limitadas por cuadrados. Si los inradios de los triángulos ABC y DEF son R y r, respectivamente, señale el inradio del triángulo MNQ.

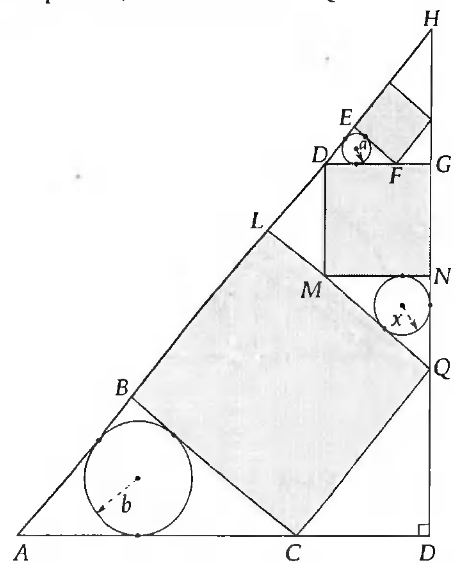


A) $\dfrac{\sqrt{Rr}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{Rr}}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{Rr}}{3}$

D) $\sqrt{Rr}$ E) $2\sqrt{Rr}$

Resolución

Nos piden x, inradio del ⊿MNQ.



Cuando dos figuras geométricas, F_1 y F_2, son semejantes, podemos plantear que la razón en que están las dos líneas de F_1 será igual a la razón en que estarán las líneas homólogas a ellas en F_2.

⊿$HLQ \sim$ ⊿HDA

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \rightarrow x^2=ab \rightarrow x=\sqrt{ab}$$

Por dato: $b=R$ y $a=r$

Reemplazando: $x=\sqrt{Rr}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

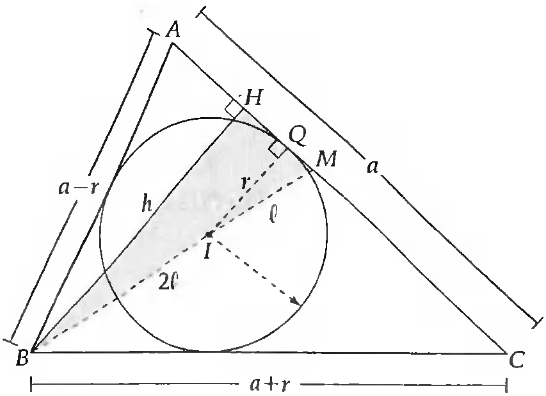
En un triángulo, las longitudes de los lados están en progresión aritmética. Calcule la razón entre el inradio y la longitud de la altura relativa al lado intermedio.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4

D) 2/3 E) 1/5

Resolución

Nos piden $\frac{r}{h}$.



Por dato, las longitudes de los lados están en progresión aritmética.
Sea $AB < AC < BC$, entonces $\overline{AC}$ es el lado de longitud intermedia.
Si $AC=a \rightarrow AB=a-r$ y $BC=a+r$
Por teorema del incentro

$$\frac{BI}{IM}=\frac{(a-r)+(a+r)}{a}=2$$

$$\rightarrow BI=2(IM)$$

$$⊿IQM \sim ⊿BHM: \ \frac{r}{h}=\frac{\ell}{3\ell}$$

$$\therefore \ \frac{r}{h}=\frac{1}{3}$$

Clave **B**

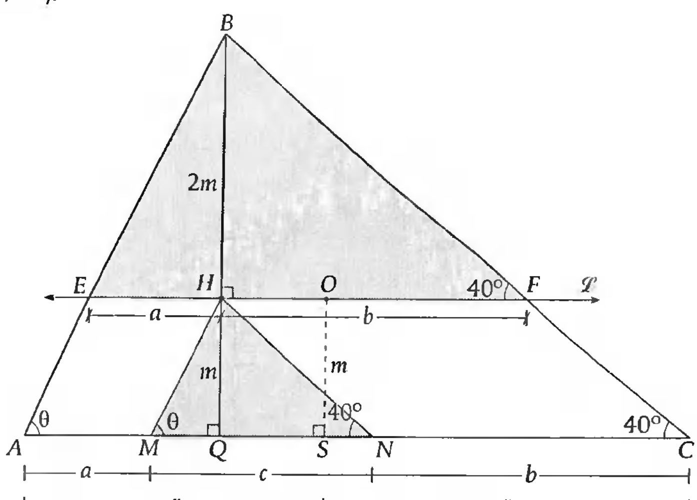
PROBLEMA N.° 22

En un triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H, se trazan $\overline{HM}//\overline{BA}$ y $\overline{HN}//\overline{BC}$, tal que M y N pertenecen a $\overline{AC}$. Si $AM+NC=2(MN)$ y $m\sphericalangle BCA=40°$, calcule la medida del ángulo formado por $\overline{BC}$ y la recta de Euler del triángulo ABC.

A) 50° B) 80° C) 20° D) 40° E) 100°

Resolución

Piden $m\sphericalangle(\overleftrightarrow{\mathscr{L}_E};\overline{BC})$.



$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}_E$: recta de Euler del $\triangle ABC$; H: ortocentro del $\triangle ABC$

Por dato: $AM+NC=2(MN) \rightarrow a+b=2c$

Se traza por H la recta $\mathscr{L}/\overleftrightarrow{\mathscr{T}}//\overline{AC} \rightarrow EH=AM=a$ y $HF=NC=b$

$\triangle EBF \sim \triangle ABC$: $\dfrac{BH}{HQ}=\dfrac{a+b}{c}=2$

Sea O circuncentro del $\triangle ABC$.

Se traza $\overline{OS}/\overline{OS}\perp\overline{AC}$ y $AS=SC$; $OS=\dfrac{BH}{2}$.

Luego, O estará contenido en $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$, entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ será la recta de Euler $(\overleftrightarrow{\mathscr{T}}_E)$ del $\triangle ABC$.

$\therefore\ m\measuredangle(\overleftrightarrow{\mathscr{T}}_E;\ \overline{BC})=40°$

Clave **D**

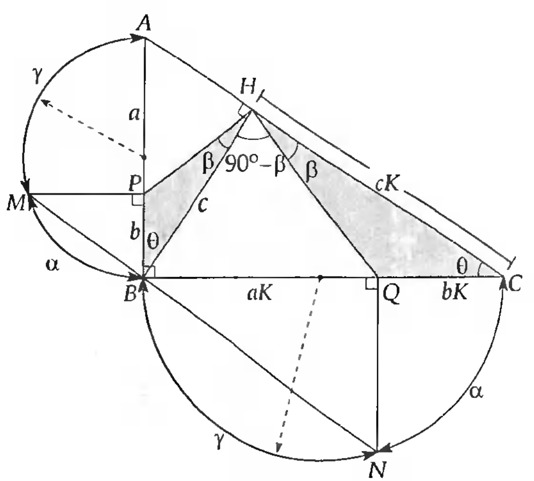
PROBLEMA N.° 23

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente y relativas a los catetos se trazan semicircunferencias, en las cuales se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $m\overset{\frown}{MB}+m\overset{\frown}{BN}=180°$. P y Q son los pies de las perpendiculares trazadas desde M y N a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente ($P\in\overline{AB}$ y $Q\in\overline{BC}$). Si H es el pie de la altura trazada desde B en el triángulo ABC, determine $m\measuredangle PHQ$.

A) 90° B) 120° C) 135° D) 45° E) 60°

Resolución

Nos piden $m\measuredangle PHQ$.



Dato:

$m\widehat{MB}+m\widehat{BN}=180°$, entonces $\alpha+\gamma=180°$

M, B y N serán colineales

$m\widehat{MB}=m\widehat{NC}=\alpha$; $m\widehat{AM}=m\widehat{NB}=\gamma$

$$\rightarrow \frac{BQ}{QC}=\frac{AP}{PB}=\frac{a}{b}$$

$\triangle AHB \sim \triangle BHC$

$$\frac{HC}{BH}=\frac{aK+bK}{a+b}=K$$

Si $BH=c \rightarrow HC=cK$

$\triangle PBH \sim \triangle QCH$ (L. A. L.)

$m\measuredangle PHB=m\measuredangle QHC$

$\therefore$ $m\measuredangle PHQ=90°$

Observación

El problema también se podría haber resuelto a partir del producto de una homotecia y una rotación respecto al punto H.

Clave **A**

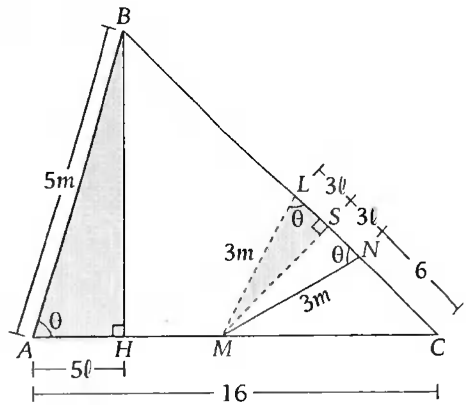
PROBLEMA N.° 24

En los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que los ángulos BAC y MNC son suplementarios. Si $3(AB)=5(MN)$, $NC=6$ y $AC=16$, indique la longitud de la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) $\sqrt{3}$

Resolución

Nos piden AH.



Datos:

$3(AB)=5(MN)$; $NC=6$ y $AC=16$

Además, los ángulos BAC y MNC son suplementarios.

$\rightarrow$ $m\measuredangle BAC=m\measuredangle MNB=\theta$

En $\overline{BN}$ ubicamos el punto L, de modo que $m\measuredangle MLN=m\measuredangle MNL=\theta$

$\triangle MLC \sim \triangle BAC$

$$\frac{AH}{LS}=\frac{AC}{LC} \rightarrow \frac{5\ell}{3\ell}=\frac{16}{6\ell+6}$$

$$\frac{5}{3}=\frac{8}{3(\ell+1)} \rightarrow 5\ell=3$$

$\therefore$ $AH=3$

Clave **B**

Capítulo

15

Relaciones métricas

Desde épocas remotas, los matemáticos se han esforzado por encontrar relaciones entre las medidas de las líneas, ya sean estas curvilíneas o rectilíneas. Por referencia tenemos que las primeras relaciones métricas se aplicaron en los triángulos. Actualmente, las relaciones métricas se aplican en diversas ramas de la tecnología (principalmente en ingeniería) para determinar distancias, ya sea para maximizar o minimizar, según sea necesario.

En este capítulo, para un mejor orden del empleo de propiedades de las relaciones métricas, los problemas que presentamos están divididos en: relaciones métricas en la circunferencia, en el triángulo rectángulo, en los triángulos oblicuángulos y en los cuadriláteros.

Capítulo 15

Relaciones métricas

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA N.° 1

En una circunferencia se trazan las cuerdas AC y BD que se intersecan en O, luego se traza una recta secante $\overline{EF}$ ($E \in \overline{AO}$, $F \in \overline{DO}$), tal que $\overline{EF}//\overline{AD}$, $(EO)(FD)=(FO)(EA)$, $(AE)(CO)=16$ y $OB=4$. Halle FD.

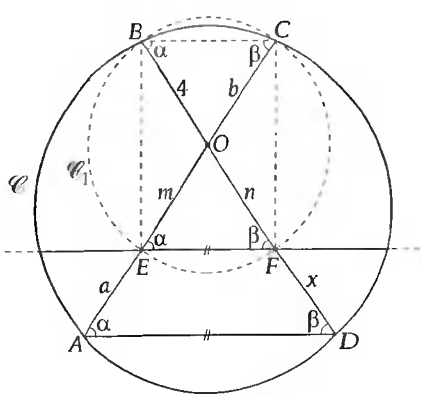
A) 8 B) 4 C) 6
D) 2 E) 5

Resolución

Según dato:

$(EO)(FD)=(FO)(EA) \;\rightarrow\; m\cdot x=n\cdot a$ (I)

$(AE)(CO)=16 \;\rightarrow\; (a)(b)=16$ (II)



Si $\overline{EF}//\overline{AD}$, entonces el cuadrilátero $EBCF$ es inscriptible.

Si trazamos $\mathscr{C}_1$, la circunferencia que pasa por E, B, C y F, entonces podemos aplicar el teorema de las cuerdas

$(4)(n)=(b)(m)$ (III)

Multiplicando (I) y (III) tenemos

$(4)(n)\times(m)(x)=(b)(m)\times(n)(a)$

$\rightarrow\; 4x=(a)(b)$

Reemplazamos en (II)

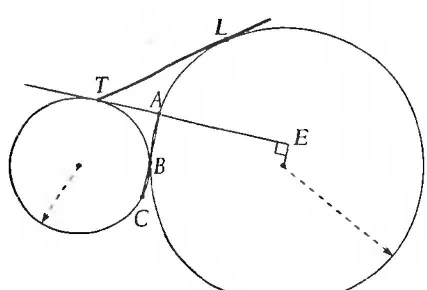
$4x=16$

$\therefore\; x=4$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

En el gráfico, T, L y B son puntos de tangencia. Si $(AC)(AB)=4$ y $TL=AE$, calcule TL.



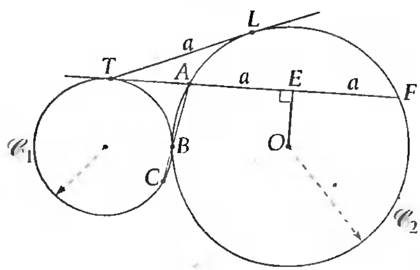
A) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ B) $2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$

C) $2(\sqrt{2}-1)$

D) $2(\sqrt{2}+1)$ E) $3(\sqrt{2}+1)$

Resolución

Por dato: $(AC)(AB)=4$ y $TL=AE=a=x$



En $\mathscr{C}_1$, por el teorema de la tangente

$(AT)^2=(AC)(AB)=4$

$\rightarrow AT=2$

En $\mathscr{C}_2$, prolongamos $\overline{AE}$ hasta F, entonces

$AE=EF=a$

Aplicamos el teorema de la tangente

$(TL)^2=(TF)(TA)$

$a^2=(2+2a)(2)$

$\rightarrow a^2=4+4a$

Resolvemos la ecuación cuadrática

$a^2-4a-4=0$

$$a=\frac{-(-4)\pm\sqrt{16-4(1)(-4)}}{2}=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{2}$$

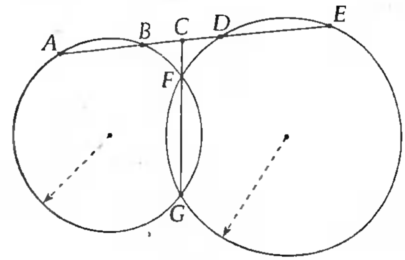
$a=2(1\pm\sqrt{2})$

$\therefore a=2(\sqrt{2}+1)$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

En el gráfico, $AB=BD=DE=4$ y $CF=1$. Calcule FG.

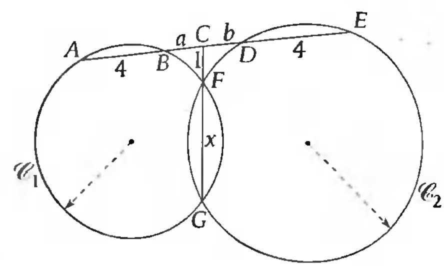


A) 8 B) 10 C) 11

D) 9 E) 12

Resolución

Por dato: $AB=BD=DE=4$; $CF=1$



Sea $BC=a$ y $CD=b$, entonces

$a+b=4$ (I)

En $\mathscr{C}_1$

$CA\cdot CB=CG\cdot CF$ (II)

En $\mathscr{C}_2$

$CE\cdot CD=CG\cdot CF$ (III)

De (II) y (III): $CA\cdot CB=CE\cdot CD$

Reemplazamos

$(4+a)(a)=(b+4)(b) \rightarrow a=b$

Reemplazamos en (I)

$a=b=2$

Reemplazamos en (II)

$$(4+2)(2)=(1+x)(1)$$

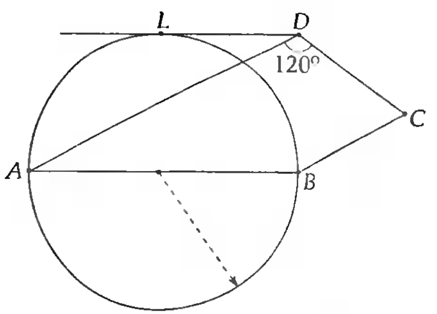
$$\rightarrow\ 12=1+x$$

$$\therefore\ x=11$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

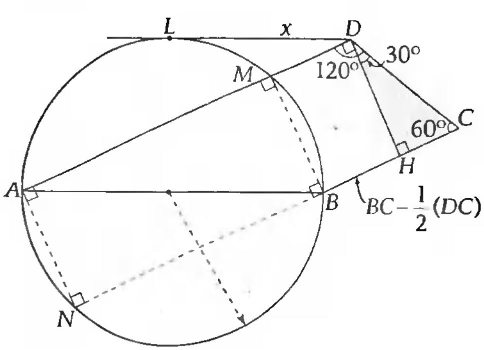
En el gráfico, L es punto de tangencia $\overline{AD}//\overline{BC}$ y $(AD)(2(BC)-DC)=9$, halle LD.



A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{2}$

D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Resolución



Tenemos

$$(AD)(2(BC)-(DC))=9$$

Trazamos $\overline{DH}\perp\overline{BC}$, entonces $CH=\dfrac{DC}{2}$

Del gráfico: $BH=BC-\dfrac{DC}{2}$

$m\measuredangle AMB=90°$, luego

$$MD=BH=BC-\frac{DC}{2}$$

Por teorema de la tangente

$$x^2=DA\cdot DM=AD\left(BC-\frac{DC}{2}\right)$$

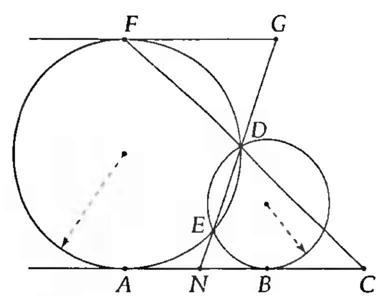
$$2x^2=AD(2BC-DC)=9\ \rightarrow\ x=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 5

Si en el gráfico, $\overline{FG}//\overline{AC}$, $GD=2(DE)$ y $FD=DC$, calcule $\dfrac{BC}{AN}$.

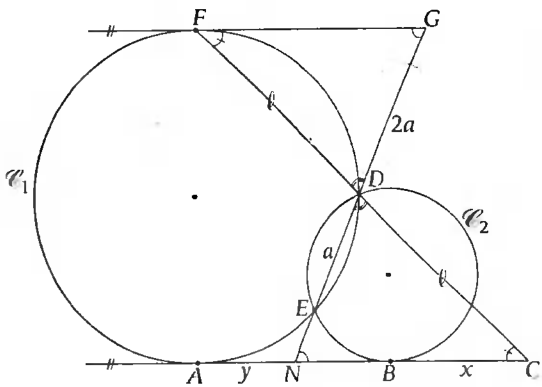


A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{5}-2$ E) $\sqrt{6}-2$

Resolución

Sea $GD=2(DE)=2a$; $\dfrac{x}{y}=?$



Como $\overline{FG}//\overline{AC}$ y $FD=DC$,

entonces $\triangle FGD \cong \triangle CND$

$ND=DG=2a \;\rightarrow\; NE=a$

En $\mathscr{C}_1$

$y^2=(ND)(NE)=(2a)(a)=2a^2$ (I)

En $\mathscr{C}_2$

$(NB)^2=(ND)(NE)=(2a)(a)=2a^2$ (II)

De (I) y (II)

$NB=y$

Como

$GF=NC=y+x$

en $\mathscr{C}_1$

$(GF)^2=(GE)(GD)$

De (I)

$(x+y)^2=(3a)(2a)=6a^2=3y^2$

$x+y=y\sqrt{3} \;\rightarrow\; x=y(\sqrt{3}-1)$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\sqrt{3}-1$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

En el gráfico, L es punto de tangencia, $\dfrac{BC}{6}=\dfrac{BN}{3}=\dfrac{BA}{4}=1$. Calcule LE.

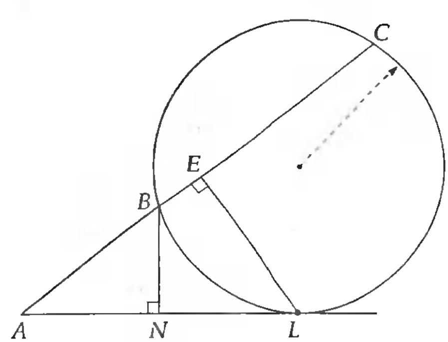
A) $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

B) $2\sqrt{10}$

C) $3\sqrt{10}$

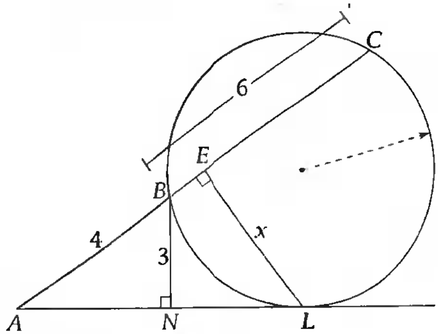
D) $\dfrac{7\sqrt{10}}{2}$

E) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$



Resolución

Por condición: $\dfrac{BC}{6}=\dfrac{BN}{3}=\dfrac{BA}{4}=1$



Aplicamos el teorema de la tangente:

$$(AL)^2=(AC)(AB)=(10)(4)=40$$

$$AL=2\sqrt{10}$$

Como el $\triangle ABN \sim \triangle ALE$

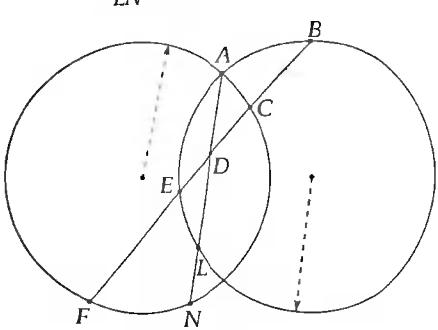
$$\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{x}$$

$$\therefore \quad x=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

En el gráfico, $FE=EC=CB$ y $DC=2(DE)$. Determine $\dfrac{DL}{LN}$.

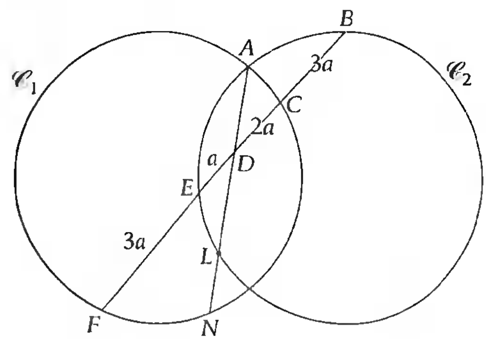


A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{4}{7}$ C) $\dfrac{2}{3}$

D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{7}{5}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{DL}{LN}$.



En $\mathscr{C}_1$

$$(AD)(DN)=(FD)(DC)=(4a)(2a)=8a^2 \quad (\text{I})$$

En $\mathscr{C}_2$

$$(AD)(DL)=(BD)(DE)=(5a)(a)=5a^2 \quad (\text{II})$$

Dividimos (II) entre (I)

$$\frac{DL}{DN}=\frac{5}{8}$$

$$\rightarrow \; 8DL=5DN$$

Del gráfico

$$8DL=5(DL+LN)=5DL+5LN$$

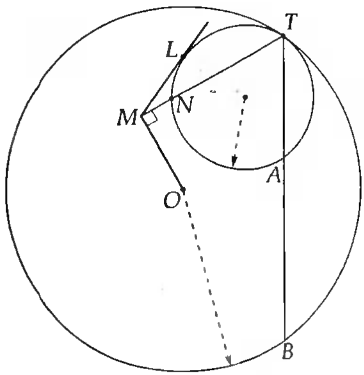
$$3DL=5LN$$

$$\therefore \; \frac{DL}{LN}=\frac{5}{3}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

En el gráfico, T y L son puntos de tangencia, $4(TA)=3(AB)$ y $TN=6$. Halle LM.



A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) $\sqrt{7}$

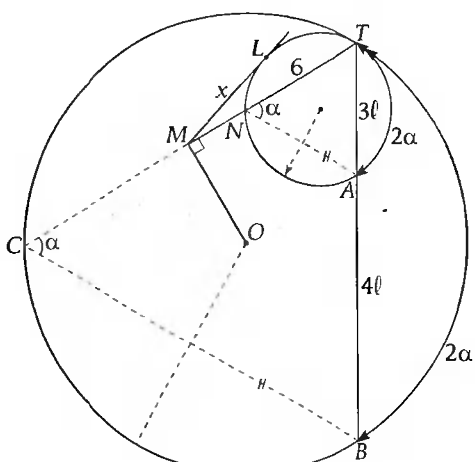
D) $2\sqrt{2}$ E) 2

Resolución

Por dato: $4(TA)=3(AB)$

$$\frac{TA}{AB}=\frac{3}{4}$$

Analizamos el gráfico



Como $m\overset{\frown}{TA}=m\overset{\frown}{TB}=2\alpha$, entonces

$m\sphericalangle TNA=m\sphericalangle TCB=\alpha \rightarrow \overline{NA}//\overline{CB}$

$$\frac{TN}{NC}=\frac{TA}{AB}=\frac{3\ell}{4\ell} \rightarrow \frac{6}{NC}=\frac{3}{4}$$

$NC=8$

Como

$$CM=MT=\frac{CT}{2}=\frac{8+6}{2}=7$$

$\rightarrow MN=1$

Luego

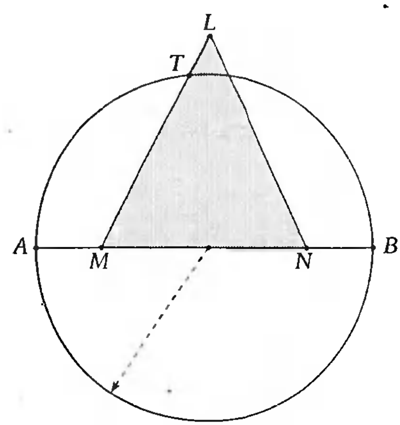
$x^2=(MT)(MN)=(7)(1)=7$

$\therefore x=\sqrt{7}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

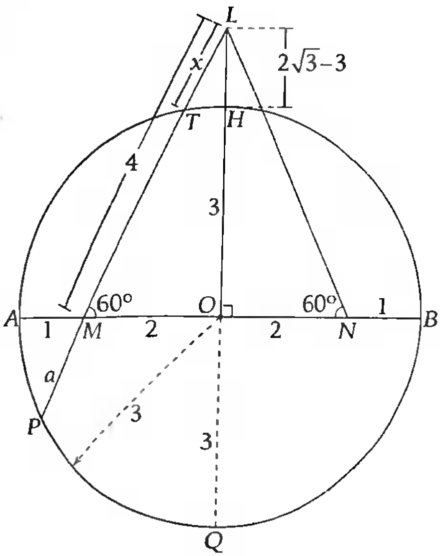
En el gráfico, $AM=NB=1$. Si el perímetro de la región triangular equilátera MLN es 12, calcule LT.



A) $5-\sqrt{5}$ B) $4-\sqrt{3}$ C) $3-\sqrt{3}$

D) $3-\sqrt{6}$ E) $4-\sqrt{6}$

Resolución



Por condición:

$2p(\triangle MLN)=12 \rightarrow MN=ML=LN=4$

$MO=ON=2 \rightarrow OL=2\sqrt{3}$

Como

$OA=OH=OQ=OB=3$

$\rightarrow LH=2\sqrt{3}-3$

Por el teorema de la secante

$(LP)(LT)=(LQ)(LH)$

$\rightarrow (4+a)(x)=(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)$

$(4+a)(x)=3$ (I)

Del teorema de las cuerdas

$(4-x)(a)=(1)(5)$ (II)

De (I) y (II)

$4x+ax=3$ y $4a-ax=5$

Sumamos

$4(x+a)=8 \rightarrow x+a=2$

$a=2-x$

En (II)

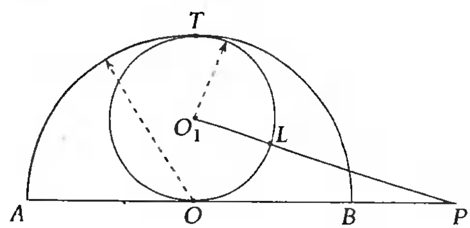
$(4-x)(2-x)=5$

$\therefore x=3-\sqrt{6}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

En el gráfico, T y O son puntos de tangencia. Si $LP=2(BP)$, calcule $\dfrac{OB}{BP}$.

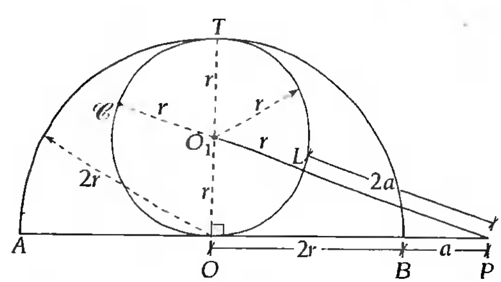


A) $\sqrt{2}$ B) $3/2$ C) $5/3$

D) $4/3$ E) $\sqrt{3}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{OB}{BP}$.



En $\mathscr{C}$, por el teorema de la tangente

$(2r+a)^2=(2a+2r)(2a)$

$4r^2+4ar+a^2=4a^2+4ar$

Luego

$$4r^2=3a^2$$

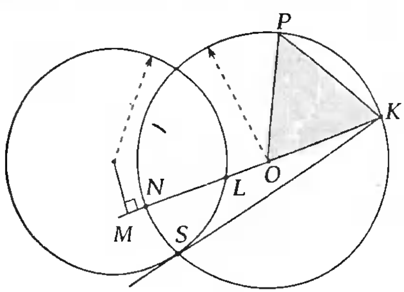
$$2r=a\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \frac{OB}{BP}=\frac{2r}{a}=\sqrt{3}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

En el gráfico, S es punto de tangencia, $MN=1$; $NL=4$ y el perímetro de la región triangular equilátera POK es 18. Determine KS.

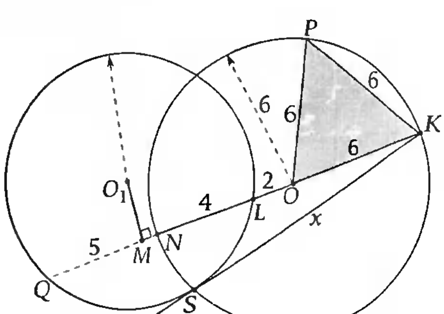


A) 9 B) 11 C) 10
D) 12 E) 14

Resolución

Por condición:

$MN=1$; $NL=4$



$\overline{O_1M}\perp\overline{QL}$

$$QM=ML=MN+NL=1+4=5$$

Como $2p_{(\triangle POK)}=3(OK)=18$ y

$OK=ON=6$, entonces $LO=2$

Del teorema de la tangente:

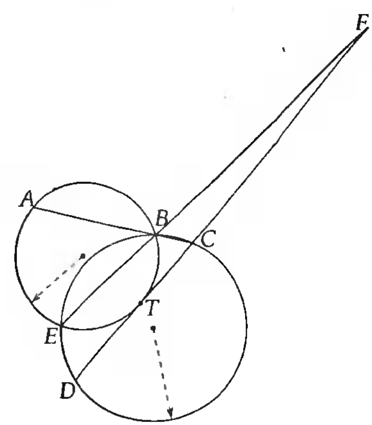
$$x^2=(KQ)(KL)=(18)(8)$$

$$\therefore\ x=12$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

En el gráfico, T es punto de tangencia, $BC=1$, $DT=3$ y $CF=4$. Halle AB.

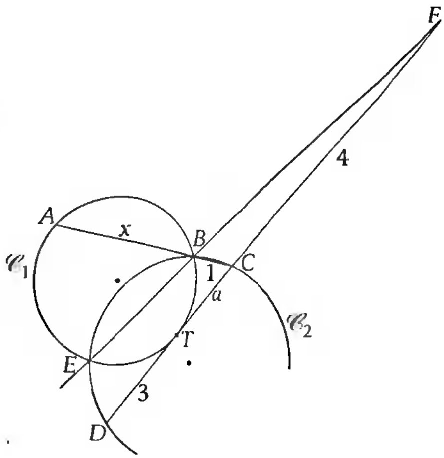


A) 6 B) 2,5
C) 3
D) 4 E) 4,5

Resolución

Por dato:

$BC=1$; $DT=3$; $CF=4$



Para $\mathscr{C}_1$: $\overline{FT}$ tangente

$$(FT)^2=(FE)(FB)=(4+a)^2$$

En $\mathscr{C}_2$

$$(FD)(FC)=(FE)(FB)$$

$$\to\ (7+a)(4)=(FE)(FB)$$

De (I)

$$(7+a)(4)=(4+a)^2$$

$$28+4a=16+8a+a^2$$

$$a^2+4a-12=0\ \to\ a=2$$

Luego en $\mathscr{C}_1$

$$(CT)^2=(CA)(CB)$$

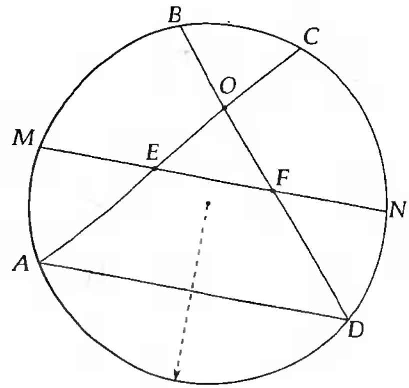
$$(2)^2=(1+x)(1)$$

$\therefore\ x=3$

Clave C

PROBLEMA N.° 13

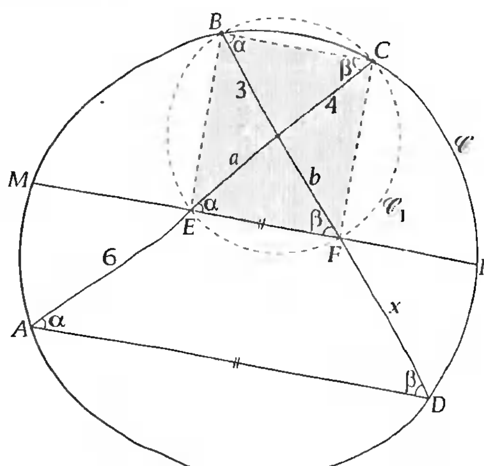
En el gráfico, $\overline{MN}//\overline{AD}$, $AE=2(BO)=6$ y $CO=4$. Calcule FD.



A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

Resolución



Si $\overline{EF}//\overline{AD}$, entonces

$$\frac{a}{b}=\frac{6}{x} \qquad \text{(I)}$$

El cuadrilátero $EBCF$ es inscriptible.

Si trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ y aplicamos el teorema de las cuerdas, tenemos que

$3 \times b = a \times 4$

$\rightarrow \ \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4}$ (II)

De (II) en (I)

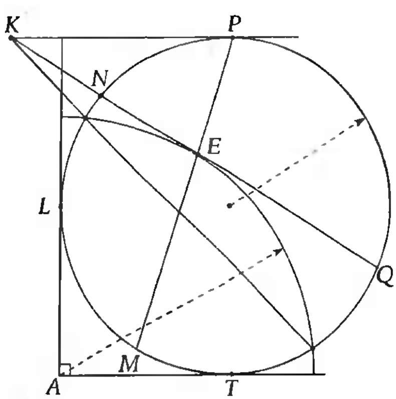
$\dfrac{6}{x} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \ x = 8$

Clave C

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, L, P, T y E son puntos de tangencia y $m\widehat{NL} - m\widehat{MT} = \alpha$. Determine $m\widehat{MQ}$.



A) $90° + 2\alpha$

B) $90° + \alpha$

C) $\dfrac{3\alpha}{2}$

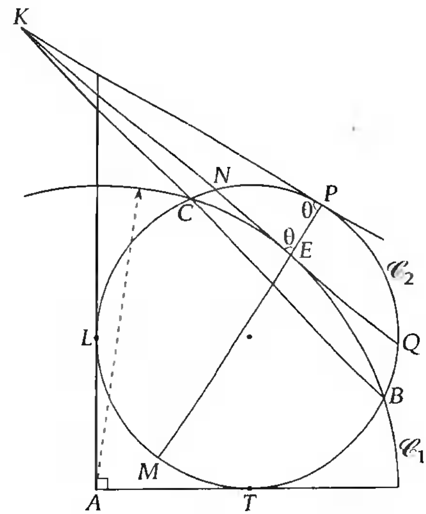
D) $45° + 2\alpha$

E) 2α

Resolución

Sabemos que $m\widehat{NL} - m\widehat{MT} = \alpha$

y que $m\widehat{MQ} = x$.



Utilizamos el teorema de la tangente en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$(KE)^2 = KB \cdot KC$

$(KP)^2 = KB \cdot KC$

$\rightarrow \ KE = KP$

$m\measuredangle KPE = m\measuredangle KEP = \theta$

- $m\measuredangle MPK = \theta$

$\theta = \dfrac{m\widehat{NP} + m\widehat{NL} + m\widehat{LM}}{2}$ (I)

- $m\measuredangle MEQ = \theta$

$\theta = \dfrac{m\widehat{NP} + m\widehat{QT} + m\widehat{TM}}{2}$ (II)

De (I) y (II)

$$m\widehat{NL}+m\widehat{LM}=m\widehat{QT}+m\widehat{TM}$$

$$\rightarrow \quad m\widehat{NL}-m\widehat{MT}=m\widehat{QT}-m\widehat{LM}=\alpha$$

Pero $m\widehat{LM}=90°-m\widehat{MT}$, entonces

$$m\widehat{QT}-(90°-m\widehat{MT})=\alpha$$

$$\underbrace{m\widehat{QT}+m\widehat{MT}}_{m\widehat{MQ}}-90°=\alpha$$

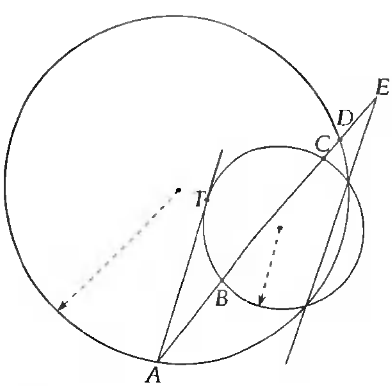
$$m\widehat{MQ} = 90°+\alpha$$

$\therefore \; x=90+\alpha$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

En el gráfico, $AT=4$, $AB=2$ y $CD=1$. Determine DE. (T es punto de tangencia)

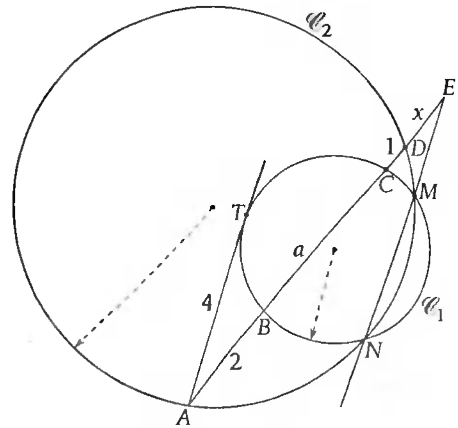


A) 2
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Resolución

Nos piden $DE=x$.

Sea $BC=a$



En $\mathscr{C}_1$

$$(EN)(EM)=(EB)(EC)=(a+1+x)(1+x) \quad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}_2$

$$(EN)(EM)=(EA)(ED)=(a+3+x)(x) \quad \text{(II)}$$

Pero, por teorema de la tangente

$$(AT)^2=(AC)(AB)$$

$$4^2=(2+a)(2)$$

$$\rightarrow \quad a=6$$

Reemplazamos en (I)=(II)

$$(7+x)(1+x)=(9+x)(x)$$

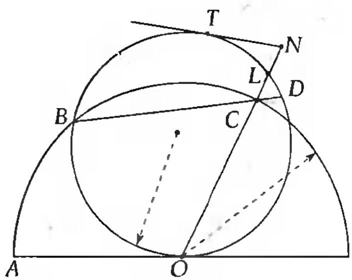
$$7+8x+x^2=9x+x^2$$

$\therefore \; x=7$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 16

En el gráfico, O y T son puntos de tangencia, $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}$, $BC=6$, $CD=2$ y $CL=LN$. Calcule TN.

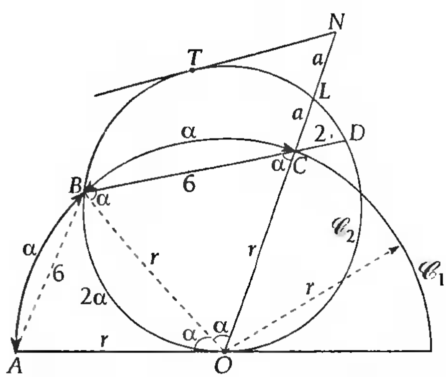


A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$

D) 2 E) $3\sqrt{5}$

Resolución

Sean $NT=x$; $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=\alpha$



En $\mathscr{C}_2$ tenemos dos cuerdas secantes, una tangente y una secante.

Entonces, del teorema de las cuerdas

$BC\cdot CD=OC\cdot CL$

$\rightarrow\ 6\times 2=r\cdot a$ (I)

Y del teorema de la tangente

$(NT)^2=(NO)(NL)$

$(NT)^2=(2a+r)(a)=2a^2+ar$

De (I)

$x^2=2a^2+12$

$m\measuredangle AOB=\alpha$, entonces en $\mathscr{C}_2$

$m\widehat{OB}=2\alpha$

$m\measuredangle BCO=\alpha=m\measuredangle CBO$

Pero $m\measuredangle BOC=\alpha$, entonces $\triangle BOC$ es equilátero.

$r=6\ \rightarrow\ a=2$

Reemplazamos

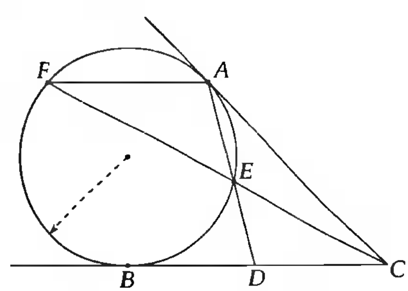
$x^2=2(2)^2+12=20$

$\therefore\ x=2\sqrt{5}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si $AF=15$, $AC=24$ y $BD=DC$, calcule ED.

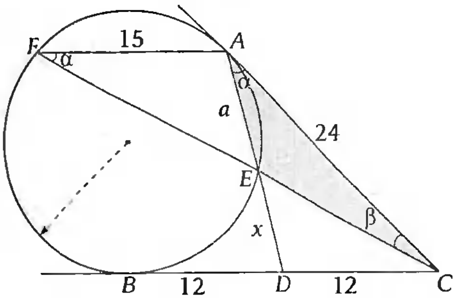


A) 8 B) 9 C) 10

D) 12 E) 14

Resolución

Si $BD=DC=\dfrac{AC}{2}=12$



Aplicando el teorema de la tangente, tenemos

$(BD)^2=(DA)(DE)$

$\rightarrow\ (12)^2=(x+a)(x)$

Para calcular x necesitamos conocer a.

En el gráfico

$DC=12$

$(DC)^2=(x+a)(x)$

Por lo tanto, $\Delta DEC \sim \Delta DCA$

$m\measuredangle DCE=m\measuredangle DAC=\alpha$

Luego, $\overline{AF}//\overline{DC}$: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4}$

Entonces $a=\dfrac{5}{4}x$

Luego

$$(12)^2=\left(x+\frac{5}{4}x\right)(x)=\frac{9}{4}x^2$$

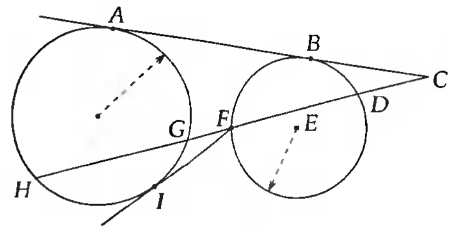
$\therefore\ x=8$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

En el gráfico, A, B e I son puntos de tangencia.

Si $AB=BC$ y $\dfrac{FD}{3}=\dfrac{DC}{2}=FG$, calcule $\dfrac{FI}{HG}$.

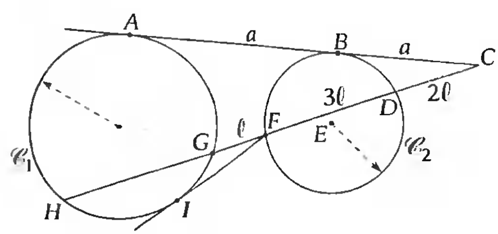


A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ B) 2 C) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{FI}{HG}$.



En $\mathscr{C}_1$

$(CA)^2=(CH)(CG)$

$\rightarrow\ (2a)^2=(CH)(6\ell)$ (I)

En $\mathscr{C}_2$

$(CB)^2=(CF)(CD)$

$\rightarrow\ (a)^2=(5\ell)(2\ell)$ (II)

Dividimos (I) entre (II)

$$4=\frac{(CH)\times 3}{5\ell} \rightarrow CH=\frac{20\ell}{3}$$

$$HG=CH-GC=\frac{20\ell}{3}-6\ell=\frac{2\ell}{3}$$

En $\mathscr{C}_1$

$$(FI)^2=(FH)(FG)$$

$$(FI)^2=\left(\ell+\frac{2\ell}{3}\right)(\ell)=\frac{5\ell^2}{3}$$

$$\rightarrow FI=\frac{\ell\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

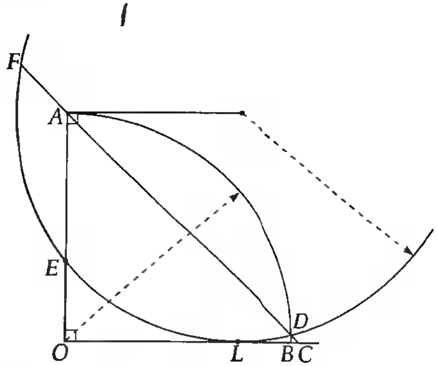
Luego

$$\frac{FI}{HG}=\frac{\frac{\ell\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{\frac{2\ell}{3}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

En el gráfico, $\frac{AE}{3}=\frac{OE}{2}=2$ y $(FA)(DC)=2$. Halle BC.

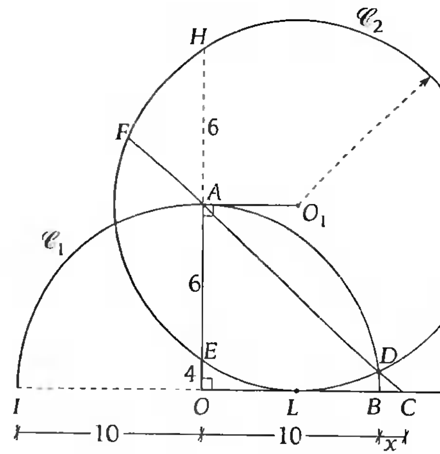


A) 1/6 B) 1/4 C) 1/8
D) 1/16 E) 1/14

Resolución

Por dato: $AE=6$ y $OE=4$; $(FA)(DC)=2$

Sea $BC=x$



En $\mathscr{C}_2$

$(OL)^2=(OH)(OE)$ (teorema de la tangente)

$(OL)^2=(16)(4) \rightarrow OL=8 \rightarrow LB=2$

En $\mathscr{C}_1$

$(CL)^2=(CA)(CD)$

$(2+x)^2=(CA)(CD)$ (I)

Y en $\mathscr{C}_1$

$(CA)(CD)=(CI)(CB)=(20+x)(x)$ (II)

De (I) y (II)

$(2+x)^2=(20+x)(x)$

$4+4x+x^2=20x+x^2 \rightarrow 16x=4$

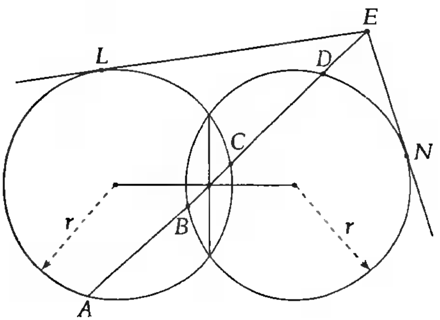
$\therefore\ x=\frac{1}{4}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

En el gráfico, L y N son puntos de tangencia, $BC=DE$ y $LE=4(EN)$.

Calcule $\dfrac{AB}{BC}$.



A) $4+3\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{6}$

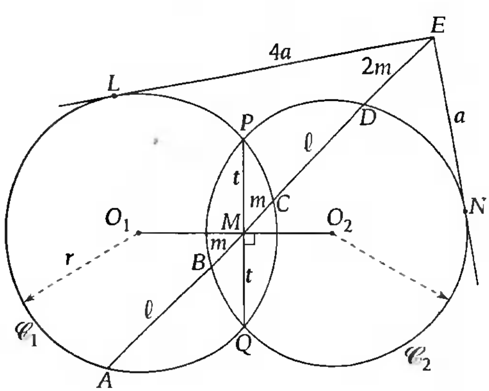
C) $3+\sqrt{6}$

D) $3+2\sqrt{6}$

E) $4+\sqrt{6}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{AB}{BC}=x$.



Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son congruentes y $PM=MQ$, entonces $BM=MC=m$ y $AB=CD=\ell$

Pero, por dato:

$$BC=DE=2m$$

En $\mathscr{C}_1$

$$(EL)^2=(EA)(EC)$$

$$\rightarrow \quad (4a)^2=(4m+2\ell)(2m+\ell) \qquad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}_2$

$$(EN)^2=(EB)(ED)$$

$$\rightarrow \quad (a)^2=(4m+\ell)(2m) \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$16=\frac{(4m+2\ell)(2m+\ell)}{(4m+\ell)(2m)}$$

$$16(m)(4m+\ell)=(2m+\ell)(2m+\ell)$$

$$64m^2+16m\ell=4m^2+4m\ell+\ell^2$$

$$60m^2+12m\ell-\ell^2=0$$

$$m=\left(\frac{2\sqrt{6}-3}{30}\right)\ell$$

Luego

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\ell}{2m}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{15(2\sqrt{6}+3)}{(2\sqrt{6}-3)(2\sqrt{6}+3)}$$

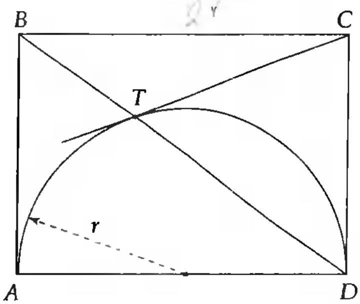
$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=3+2\sqrt{6}$$

Clave **D**

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

PROBLEMA N.° 21

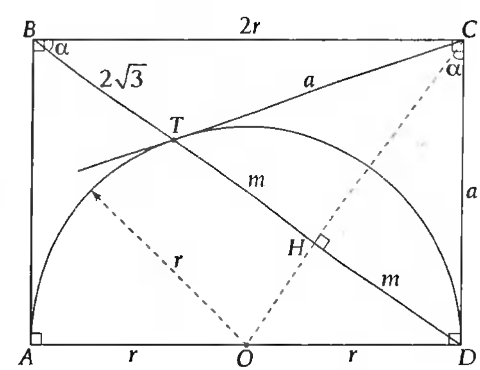
Según el gráfico, T es punto de tangencia, $TB=2\sqrt{3}$. Calcule r.



A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

Resolución



$\triangle ODC \sim \triangle DCB$

$$\frac{r}{a}=\frac{a}{2r} \rightarrow a^2=2r^2$$

$$a=r\sqrt{2}$$

En el $\triangle BCD$

$$(BC)^2=(BD)(BH)$$

$$(2r)^2=(BD)(BH) \qquad \text{(I)}$$

$$(CD)^2=(BD)(DH) \text{ y}$$

$$\left(r\sqrt{2}\right)^2=(BD)(DH) \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$2=\frac{BH}{DH} \rightarrow BH=2(DH) \rightarrow BH=2m$$

Como

$$BH=2m=2\sqrt{3}+m \rightarrow m=2\sqrt{3}$$

Luego

$$BH=4\sqrt{3}; \; HD=2\sqrt{3}$$

Reemplazamos en (I)

$$4r^2=BD\cdot BH=\left(6\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}\right)$$

$$r^2=18$$

$$\therefore \; r=3\sqrt{2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 22

En un trapecio de diagonales perpendiculares, el producto de las longitudes de sus diagonales es a y la base media mide b. Determine la altura del trapecio.

A) $2a/b$ B) b/a

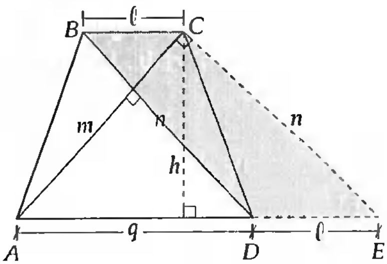
C) a/b

D) $3a/b$ E) $a/2b$

Resolución

Datos:

$$m\cdot n=a \ \text{ y } \ \frac{\ell+q}{2}=b$$



Trazamos $\overline{CE}//\overline{BD}$

Luego, $DBCE$ es un paralelogramo donde

$CE=BD=n$ y $DE=BC=\ell$

$\rightarrow$ $\ell+q=2b=AE$

En el ⊿ACE

$m\cdot n=(\ell+q)(h)$

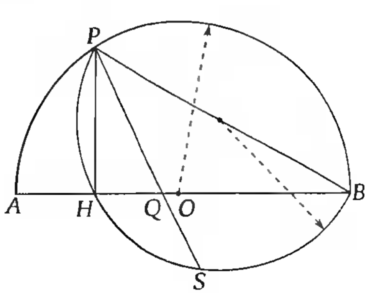
$a=2b(h)$

$\therefore$ $h=\dfrac{a}{2b}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

En el gráfico, $m\overset{\frown}{PH}=m\overset{\frown}{HS}$ y $(AQ)(AB)=18$. Calcule PQ.



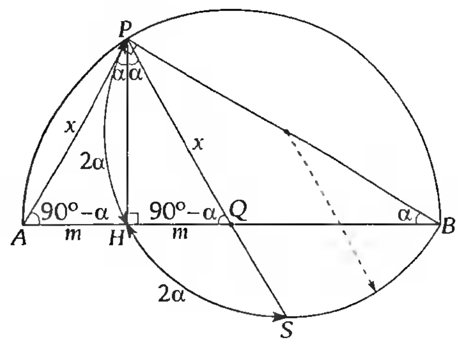
A) 2 B) $3\sqrt{2}$ C) 3

D) 6 E) 4

Resolución

Nos piden $PQ=x$.

Dato: $(AQ)(AB)=18$



$m\sphericalangle HBP=\alpha$, entonces

$m\overset{\frown}{PH}=2\alpha=m\overset{\frown}{HS}$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle HPS=\alpha$

En el ⊿APB

$m\sphericalangle APH=m\sphericalangle ABP=\alpha$

$\rightarrow$ $PA=PQ=x$

Luego

$(AP)^2=(AB)(AH)$

$$x^2=(AB)\left(\frac{AQ}{2}\right)=\frac{(AQ)(AB)}{2}$$

$$x^2=\frac{18}{2}=9$$

$\therefore$ $x=3$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

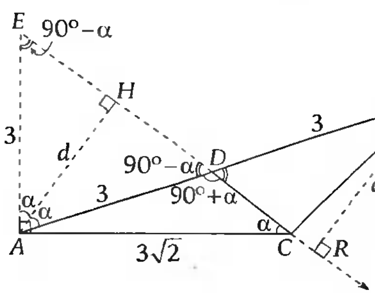
En un triángulo ABC se traza la mediana CD. Si $AC=3\sqrt{2}$, $AB=6$ y $m\sphericalangle CDA=90°+m\sphericalangle ACD$; calcule la distancia de B a $\overleftrightarrow{CD}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

Resolución

$\overline{CD}$: mediana $\rightarrow$ $AD=DB=3$

Si la $m\sphericalangle ACD=\alpha$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle CDA=90°+\alpha$



Prolongamos $\overline{CD}$ hasta E de modo que la $m\sphericalangle EAC=90°$

$m\sphericalangle AED=90°-\alpha=m\sphericalangle ADE$

$\rightarrow$ $AE=AD=3$

Si trazamos

$\overline{AH}\perp\overleftrightarrow{DC}$ y $\overline{BR}\perp\overleftrightarrow{DC}$

$\rightarrow$ $AH=BR=d$

Luego, en el ⊿EAC

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(3\sqrt{2})^2}=\frac{1}{6}$$

$\therefore$ $d=\sqrt{6}$

Clave **E**

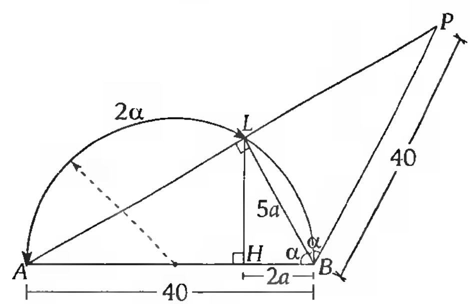
PROBLEMA N.° 25

Desde un punto P de la región exterior a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza $\overline{PA}$, de modo que lo interseca en L, luego se traza $\overline{LH}$ perpendicularmente a $\overline{AB}$ en H $(H\in\overline{AB})$. Si $m\overset{\frown}{AL}=2s\sphericalangle LBP$; $5(HB)=2(LB)$ y $BP=40$, calcule LB.

A) 12 B) 16 C) 20
D) 24 E) 32

Resolución

Nos piden $\dfrac{HB}{LB}=\dfrac{2}{5}$; $LB=x$.



Sea $HB=2a$ $\rightarrow$ $LB=5a=x$

Del dato, si la $m\sphericalangle LBP=\alpha$, entonces

$m\overset{\frown}{AL}=2\alpha$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle ABL=\alpha$

y también la $m\sphericalangle ALB=90°$

En el $\triangle ABP$

$AL=LP$ y $AB=BP=40$

Luego en el ⊿ALB

$(LB)^2=(AB)(BH)$ $\rightarrow$ $(5a)^2=(40)(2a)$

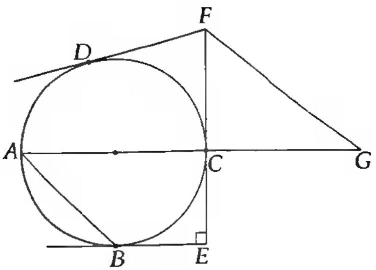
$25a=80$ $\rightarrow$ $5a=16$

$\therefore$ $LB=5a=x=16$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

En el gráfico, D, C y B son puntos de tangencia, $m\widehat{DC}+2m\sphericalangle FGC=180°$; $AB=BE\sqrt{2}$ y $AC\cdot GC=a^2$. Determine FD.



A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{a}{4}$

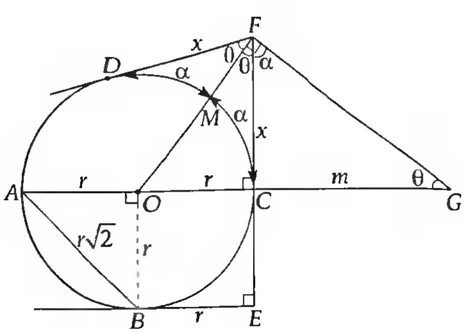
D) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Resolución

Por condición: $AC\cdot GC=a^2$

Sea la $m\sphericalangle FGC=\theta$ y $m\widehat{DC}=2\alpha$, entonces

$$m\widehat{DM}=m\widehat{MC}=\alpha$$



Del dato:

$$2\alpha+2(\theta)=180° \rightarrow \alpha+\theta=90° \text{ y}$$

$$m\sphericalangle CFG=\alpha$$

Como

$$m\sphericalangle DFC-m\widehat{DC}=180°$$

$$m\sphericalangle DFC=2\theta$$

$$m\sphericalangle DFO=m\sphericalangle CFO=\theta$$

Luego

$$m\sphericalangle OFG=90° \text{ y}$$

$$FC=FD=x$$

Como

$$BE=r \rightarrow AB=r\sqrt{2}$$

En el ⊿OFG:

$$x^2=r\cdot m$$

Pero $AC=2r$ y $GC=m$

$$2r\cdot m=a^2$$

$$x^2=\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

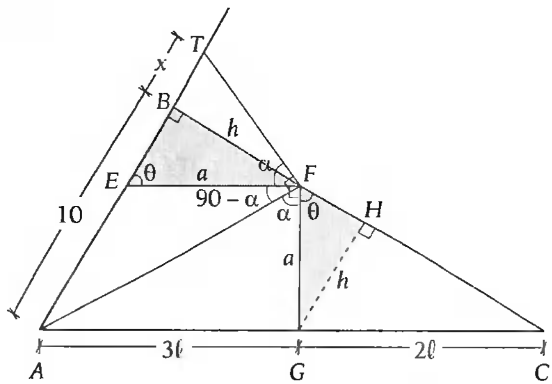
En un triángulo ABC se ubican los puntos E, F, G y T en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y en la prolongación de $\overline{AB}$, respectivamente, tal que la $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle EFG=90°$, $m\sphericalangle TFE=m\sphericalangle AFG$; $\frac{AG}{GC}=\frac{3}{2}$; $EF=FG$ y $AB=10$. Calcule TB.

A) 0,8 B) 1,6 C) 3,2

D) 1,8 E) 3,6

Resolución

Nos piden TB, donde $\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{3}{2}$. Si $AG=3\ell \rightarrow GC=2\ell$



$m\sphericalangle TFE=m\sphericalangle AFG=\alpha$

$m\sphericalangle AFE=90-\alpha \rightarrow m\sphericalangle AFT=90°$

También

$m\sphericalangle FEB=m\sphericalangle GFC=\theta$ y $EF=FG=a$

Si trazamos

$\overline{GH}\perp\overline{BC} \rightarrow \triangle GHF\cong\triangle FBE$

$\rightarrow FB=GH=h$

En el $\triangle AFT$

$h^2=(10)(x)$ (I)

Pero en el $\triangle ABC$

$\overline{GH}//\overline{AB} \rightarrow \dfrac{h}{10}=\dfrac{2\ell}{5\ell}$

$\rightarrow h=4$ (II)

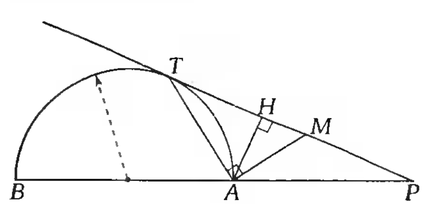
Luego (II) en (I): $(4)^2=10x$

$\therefore x=1,6$

Clave **B**

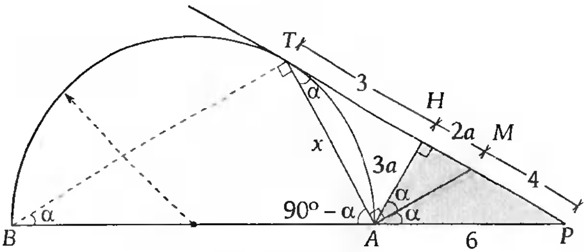
PROBLEMA N.° 28

Según el gráfico, $PM=4$; $AP=6$ y $TH=3$. Halle AT.



A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{17}$ D) $\sqrt{19}$ E) $\sqrt{21}$

Resolución



m∢ABT=m∢ATH=α → m∢MAP=α y

m∢HAM=α

Luego, en el △AHP (teorema de la bisectriz)

$$\frac{AH}{HM}=\frac{AP}{PM}=\frac{3}{2}$$

Si $AH=3a$ → $HM=2a$

Luego en el ⊾TAM: $(3a)^2=(2a)(3)$ → $a=\dfrac{2}{3}$

$AH=3a=2$ → $x^2=2^2+3^2=13$

$\therefore$ $x=\sqrt{13}$

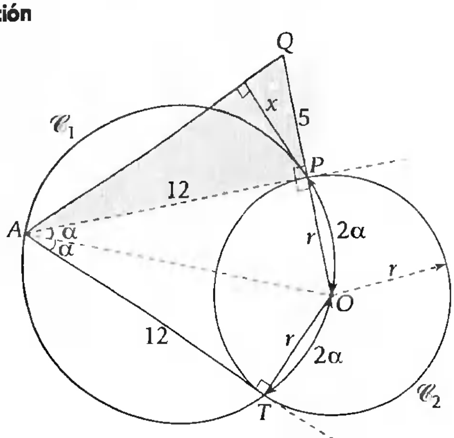
Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son secantes en los puntos P y T, el centro O de $\mathscr{C}_2$ pertenece a $\mathscr{C}_1$, la cuerda $\overline{AT}$ de $\mathscr{C}_1$ es tangente a $\mathscr{C}_2$, en la prolongación de $\overline{OP}$ se ubica el punto Q, tal que $PQ=5$; $AT=12$. Determine la distancia de P a $\overline{AQ}$.

A) 4 B) $\dfrac{60}{17}$ C) $\dfrac{60}{13}$ D) $\dfrac{30}{7}$ E) $\dfrac{60}{7}$

Resolución



$O\in\mathscr{C}_1$ → $OT=OP=r$ y

m∢OTA=90°

En $\mathscr{C}_1$

m$\overset{\frown}{OT}$ = m$\overset{\frown}{OP}$ = 2α

→ m∢TAO=m∢PAO=α

El cuadrilátero $APOT$ está inscrito, entonces m$\measuredangle APO = 90°$ y $AP = AT = 12$

Luego, en el ⊿APQ: $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(12)^2} + \dfrac{1}{(5)^2}$

$\therefore\ x = \dfrac{60}{13}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Según el gráfico, m$\overset{\frown}{AP}$ − m$\overset{\frown}{AD}$ = m$\measuredangle ABE = 90°$, $AB = a$; $EC = b$. Calcule BF. (A es punto de tangencia)

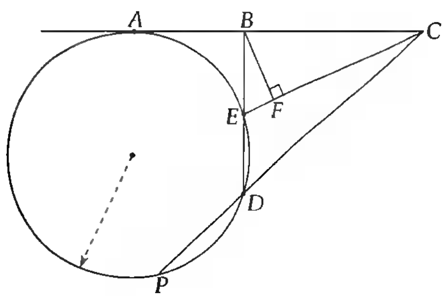
A) $\dfrac{2a^2}{b}$

B) $\dfrac{a^2}{2b}$

C) $\sqrt{ab}$

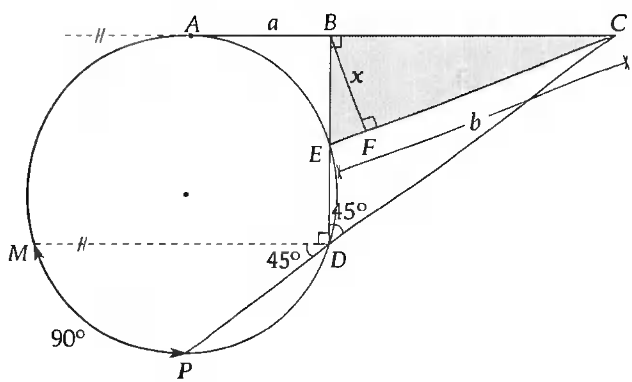
d) $\dfrac{a^2}{b}$

E) $\dfrac{b^2}{a}$



Resolución

Según condición: m$\overset{\frown}{AP}$ − m$\overset{\frown}{AD}$ = 90°



Si $\overleftrightarrow{DM} // \overleftrightarrow{CA}$, entonces m$\overset{\frown}{AM}$ = m$\overset{\frown}{AD}$

m$\overset{\frown}{AP}$ − m$\overset{\frown}{AM}$ = m$\overset{\frown}{MP}$ = 90° → m$\measuredangle MDP = 45°$

También

$m\measuredangle MDB=90^\circ \rightarrow m\measuredangle BDC=45^\circ$

$\rightarrow BD=BC$ (I)

En el $\triangle EBC$:

$(EB)(BC)=(EC)(x)$ (II)

Del teorema de la tangente

$a^2=BD\cdot BE$

Reemplazamos en (I)

$a^2=BC\cdot BE$

Reemplazamos en (II)

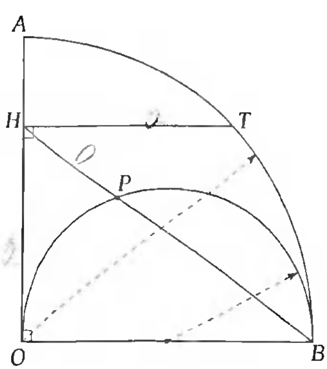
$a^2=b\cdot x$

$\therefore\ x=\dfrac{a^2}{b}$

Clave **D**

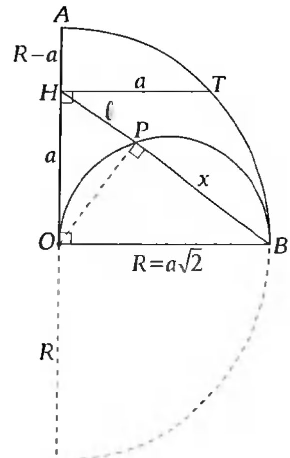
PROBLEMA N.° 31

En el gráfico, $HP=\ell$ y $HT=OH$. Calcule PB.



A) 4ℓ B) 3ℓ
C) 2ℓ
D) $1{,}5\ell$ E) ℓ

Resolución



En el $\triangle OBH$

$a^2=(\ell+x)(\ell)$

También

$a^2=(R-a)(R+a)$

$a^2=R^2-a^2$

$\rightarrow\ R=a\sqrt{2}$

En el $\triangle OBH$

$HB=a\sqrt{3}$

$a^2=(a\sqrt{3})(\ell)$

$a=\ell\sqrt{3}$

Luego

$(\ell\sqrt{3})^2=(\ell+x)(\ell)$

$3\ell=\ell+x$

$\therefore\ x=2\ell$

Otra solución:

$OH=HT=a$

$\rightarrow\ OT=a\sqrt{2}=R$

En el ⊾ OBH

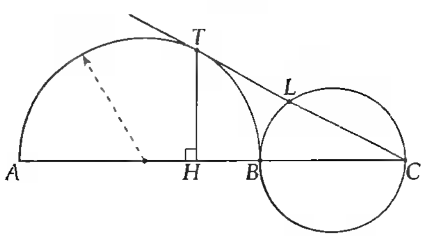
$$\frac{x}{\ell}=\left(\frac{OB}{OH}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{a}\right)^2=2$$

$\therefore\ x=2\ell$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

En el gráfico, T y B son puntos de tangencia. Si $AH=5(BL)=10$, calcule LC.



A) 2   B) $\sqrt{5}$ C) 4
D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

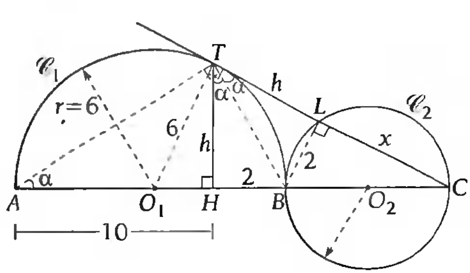
Resolución

Según condición:

$AH=10$

$BL=2$

$LC=x$



Como los centros y el punto de tangencia son colineales, entonces el centro de $\mathscr{C}_2$ pertenece a $\overleftrightarrow{ABC}$.

Como

$m\measuredangle HTB=m\measuredangle LTB=\alpha\ \rightarrow\ TH=TL=h$

$m\measuredangle BLC=90^\circ\ \rightarrow\ BL=BH=2$

En el ⊾ ATB

$h^2=(2)(10)$

$\rightarrow\ h=2\sqrt{5}$

Como ⊾ BLC ~ ⊾ O_1TC

$$\frac{x}{2}=\frac{x+h}{6}$$

$3x=x+h$

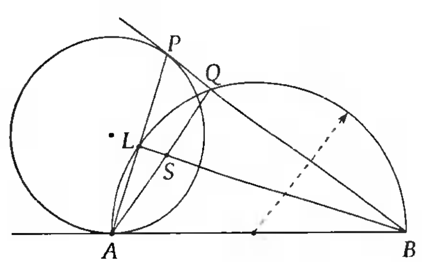
$\rightarrow\ h=2x=2\sqrt{5}$

$\therefore\ x=\sqrt{5}$

Clave **B**

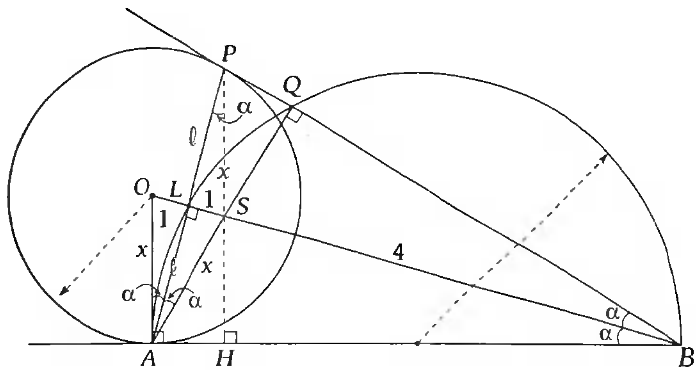
PROBLEMA N.° 33

Según el gráfico, $BS=4(LS)=4$. Si A y P son puntos de tangencia, calcule PS.



A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

Resolución



Por dato:

$BS=4$; $LS=\ell$

Como $BA=BP$, entonces $\overline{BL}\perp\overline{AP}$. Además, $AL=LP=\ell$ $\rightarrow$ $SP=SA=x$

La prolongación de $\overline{BL}$ pasa por O. Como $m\sphericalangle OAB=90^\circ$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle OAL=\alpha$

$OA=AS=x$ y $OL=LS=1$

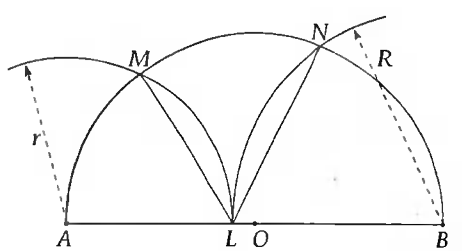
Luego, en el $\triangle OAB$: $x^2=(OB)(OL)=(6)(1)$

$\therefore$ $x=\sqrt{6}$

Clave **E**

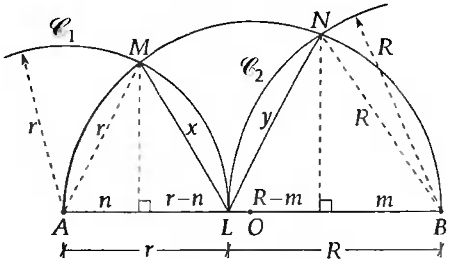
PROBLEMA N.° 34

En el gráfico, halle $\dfrac{ML}{NL}$.



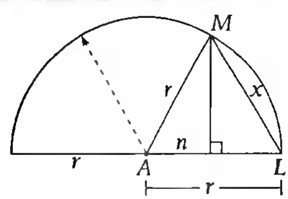
A) $\dfrac{r}{R}$ B) $\dfrac{r+R}{R}$ C) $\dfrac{R}{r}$ D) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$ E) $\sqrt{\dfrac{R}{r}}$

Resolución



En $\mathscr{C}$: $r^2=(r+R)(n)$ y $R^2=(r+R)(m)$

Nota



$x^2=2r(r-n)$

En $\mathscr{C}_1$

$$x^2=(2r)(r-n) \qquad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}_2$

$$y^2=(2R)(R-m) \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{r(r-n)}{R(R-m)}=\frac{r\left(r-\dfrac{r^2}{R+r}\right)}{R\left(R-\dfrac{R^2}{R+r}\right)}$$

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{r^2(R)}{R^2(r)}=\frac{r}{R}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\sqrt{\frac{r}{R}}$$

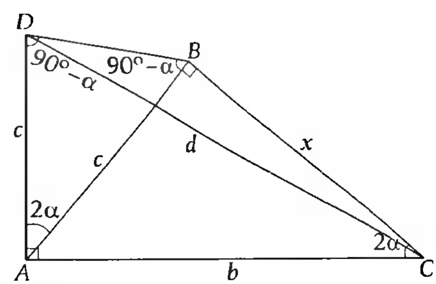
Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ un punto D, tal que la $m\sphericalangle DAC=90°$; $m\sphericalangle DBA=90°-\dfrac{m\sphericalangle BCA}{2}$ y $2(AC^2)-(DC^2)=40$. Calcule BC.

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $3\sqrt{10}$ E) 6

Resolución



$$m\sphericalangle DBA=90°-\frac{m\sphericalangle BCA}{2}$$

Si $m\sphericalangle BCA=2\alpha$, entonces

$m\sphericalangle DBA=90°-\alpha$

Como $\overline{AD}\perp\overline{AC}$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle DAB=2\alpha$

Luego, en el $\triangle ABD$

$m\sphericalangle ADB=90-\alpha=m\sphericalangle ABD$

$\rightarrow$ $AD=AB=c$

Del dato:

$2(b^2)-d^2=40$

En el ⊿ADC

$d^2=b^2+c^2$

En el ⊿ABC

$$c^2+x^2=b^2$$

Sumando ambas expresiones

$$d^2+x^2=2b^2$$

$$x^2=2b^2-d^2=40$$

$$\therefore\ x=2\sqrt{10}$$

Clave **C**

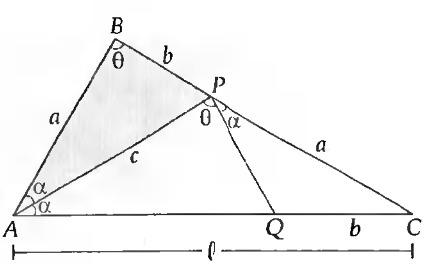
PROBLEMA N.° 36

En un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q en BC y AC, respectivamente, tal que $m\measuredangle ABP=m\measuredangle APQ$; $m\measuredangle PAQ=m\measuredangle CPQ$; $AB=PC$ y $PC^2+QC^2=AP^2$. Determine $m\measuredangle ABC$.

A) 90° B) 45° C) 75°
D) 82° E) 120°

Resolución

Sea $AB=PC=a$; $QC=b$ y $AP=c$, entonces $a^2+b^2=c^2$



Del dato:

$$m\measuredangle ABP=m\measuredangle APQ=\theta$$

$$m\measuredangle PAQ=m\measuredangle CPQ=\alpha$$

En el $\triangle ABP$

$$m\measuredangle PAB+\theta=m\measuredangle APC=\theta+\alpha$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle PAB=\alpha$$

Del $\triangle APC\sim\triangle PQC$

$$(PC)^2=(AC)(QC)$$

$$\rightarrow\ a^2=\ell\cdot b \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle ABC$, del teorema de la bisectriz interior

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}\ \rightarrow\ \frac{BP}{a}=\frac{a}{\ell}$$

$$\rightarrow\ a^2=\ell\cdot BP \qquad \text{(II)}$$

De (I)=(II)

$$BP=b$$

Como $a^2+b^2=c^2$,

en el $\triangle ABP$

$$\theta=90°$$

$$\therefore\ m\measuredangle ABP=90°$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 37

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$; luego se ubica L en $\overline{AB}$, tal que $\overline{LD}\perp\overline{DB}$, $BC=DC$ y $LB=7(AL)=7$. Calcule LD.

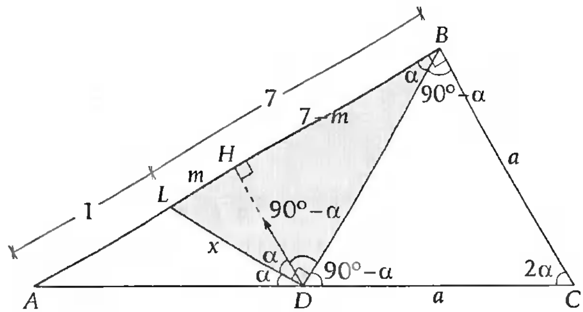
A) $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$ B) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

C) $\dfrac{7}{3}$

D) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{7}{6}$

Resolución

Según condición



Si m∢$ACB=2\alpha$, entonces

m∢CDB=m∢$CBD=90°-\alpha$

Como m∢$ABC=90°$ $\rightarrow$ m∢$ABD=\alpha$

También m∢$BDL=90°$ $\rightarrow$ m∢$ADL=\alpha$

Luego, en el ⊿BDL trazamos la altura $\overline{DH}$, entonces m∢$LDH=\alpha=$m∢ADL

En el △ADH, $\overline{DL}$ es bisectriz interior y $\overline{DB}$ bisectriz exterior.

Si $LH=m$; $HB=7-m$ y

$$\frac{1}{m}=\frac{8}{7-m} \rightarrow m=\frac{7}{9}$$

En el ⊿LDB: $x^2=(7)(m)=\frac{7^2}{9}$

$\therefore \quad x=\frac{7}{3}$

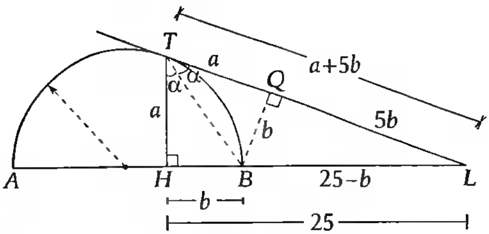
Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

En una semicircunferencia de diámetro AB, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto L. Luego se traza la tangente $\overline{LT}$ (T: punto de tangencia) y $\overline{TH}$ es perpendicular a $\overline{AL}$ ($H \in \overline{AB}$). Si $TL=TH+5(HB)$ y $HL=25$, calcule TH.

A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) 1 D) 5 E) 2,5

Resolución



Sea $TH=a$ y $HB=b$

$\rightarrow\ TL=a+5b$

Si $HL=25$

$\rightarrow\ BL=25-b$

Sabemos que

$m\measuredangle BTH=m\measuredangle BTL=\alpha$

Al trazar $\overline{BQ}\perp\overline{TL}$

$BQ=BH=b$ y $TQ=TH=a$

$\rightarrow\ QL=5b$

Del teorema de Pitágoras

$\triangle BQL$: $b^2+(5b)^2=(25-b)^2$ (I)

$\triangle THL$: $a^2+(25)^2=(a+5b)^2$ (II)

De (I) y (II)

$a=5$

$\therefore\ TH=a=5$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 39

En una circunferencia de centro O se trazan, desde dos puntos exteriores A y B, las tangentes AN y BM (N y M son los puntos de tangencia), tal que $m\measuredangle OBA=90°$. Si $AN=a$ y $BM=b$, determine AB.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$

B) $\sqrt{a^2-b^2}$

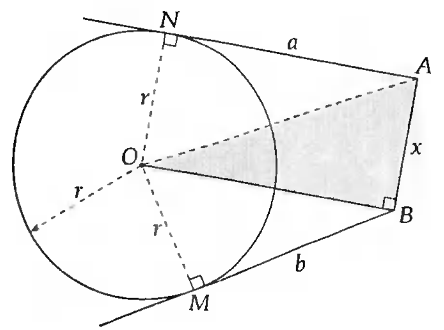
C) $\sqrt{2a^2-b^2}$

D) $\dfrac{a+b}{2}$

E) $\dfrac{a-b}{2}$

Resolución

Sea $AB=x$ y r el radio de la circunferencia.



$\overline{ON}$ y $\overline{OM}$ son perpendiculares a $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{BM}$.

Luego, en el $\triangle ONA$

$(OA)^2=r^2+a^2$ (I)

$\triangle BMO$: $(OB)^2=r^2+b^2$ (II)

$\triangle OAB$: $x^2=(OA)^2-OB)^2$ (III)

Reemplazamos (I) y (II) en (III)

$x^2=a^2-b^2$

$\therefore\ x=\sqrt{a^2-b^2}$

Clave **B**

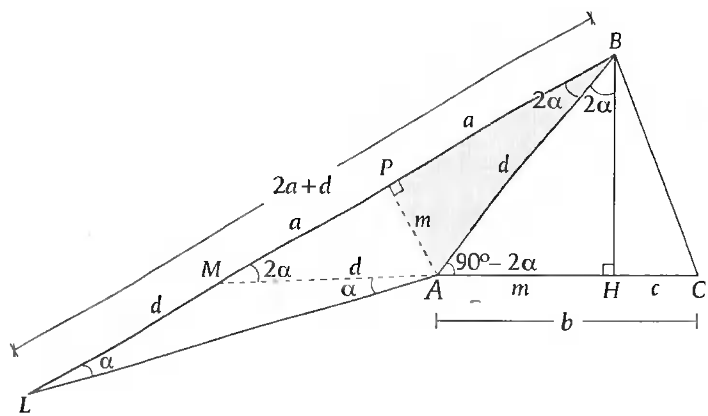
PROBLEMA N.° 40

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AC}$), luego se ubica L en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $m\measuredangle ABL = 2m\measuredangle ALB$, $m\measuredangle LBA + m\measuredangle BAC = 90°$,
$AC=b$, $AB=d$, $HC = c = 2\sqrt{5}$, $BL=2a+d$ y $a^2+c^2=d^2$. Calcule b.

A) 4 B) $3\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$ D) 6 E) 8

Resolución

Según condición: $a^2+c^2=d^2$. Nos piden $b=x$.



Si $\underbrace{m\measuredangle LBA}_{2\alpha} + m\measuredangle BAC = 90°$, entonces

$m\measuredangle BAC = 90° - 2\alpha \rightarrow m\measuredangle ABH = 2\alpha$

$\overline{BA}$ es bisectriz, entonces $AP=AH=m$

En el $\triangle ABL$, al trazar $\overline{AM}$ de modo que la $m\measuredangle LAM=\alpha$, entonces $m\measuredangle AMB=2\alpha$

$AM=AB=d$ y $LM=AM=d \rightarrow MB=2a$

Pero en el $\triangle MAB$ (isósceles): $MP=PB=a$

Luego, en el ⊾APB se cumple $a^2+m^2=d^2 \rightarrow m=c$ (por dato)

$b = m + c = 2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

Clave **C**

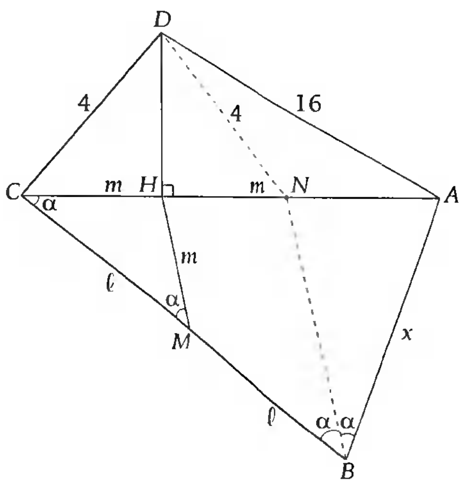
Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo

PROBLEMA N.° 41

Es un cuadrilátero $ABCD$ se traza $\overline{DH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$); luego se ubica el punto M de $\overline{BC}$, tal que $MH=HC$; m$\measuredangle ABC$=2(m$\measuredangle HMC$); $AD=16$; $DC=4$ y $BM=MC$. Calcule AB.

A) 12 B) 9 C) $4\sqrt{15}$
C) $2\sqrt{15}$ E) $5\sqrt{2}$

Resolución



En el $\triangle ABC$ trazamos la bisectriz BN

$\rightarrow$ $\overline{BN} // \overline{MH}$ y $NH=HC=m$

$\triangle ABN \sim \triangle ACB$

$$\frac{AN}{x}=\frac{x}{AC} \rightarrow x^2=AC \cdot AN$$

Aplicando el teorema de Stewart en el $\triangle CDN$

$$(AD)^2=(CD)(DN)+(AC)(AN)$$
$$16^2=(4)(4)+(AC)(AN)$$

Entonces

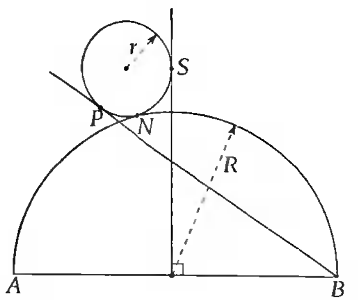
$$x^2=16^2-4^2=(16-4)(16+4)=(12)(20)$$

$\therefore$ $x=4\sqrt{15}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 42

Según el gráfico, P, S y N son puntos de tangencia. Si $(R+2r)R=17$, determine PB.



A) $\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{17}$ C) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

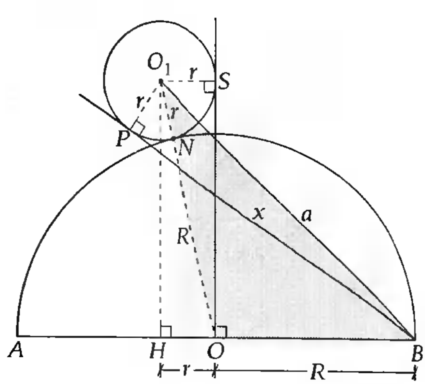
D) $\sqrt{34}$ E) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

Resolución

Nos piden $x=PB$.

En el ⊿O_1PB

$$x^2=a^2-r^2 \quad \text{(I)}$$



Tenemos

$$OB=ON=R \text{ y } O_1N=O_1S=O_1P=r$$

Trazamos $\overline{O_1H} \perp \overline{AB}$, luego

$$HO=O_1S=r$$

En el $\triangle OO_1B$

$$(BO_1)^2-(OO_1)^2=(BH)^2-(OH)^2$$

$$a^2-(R+r)^2=(R+r)^2-r^2$$

$$a^2=2(R+r)^2-r^2$$

Reemplazamos en (I)

$$x^2=2(R+r)^2-2r^2=2R^2+4Rr$$

$$x^2=2R(R+2r)$$

Pero, $R(R+2r)=17$

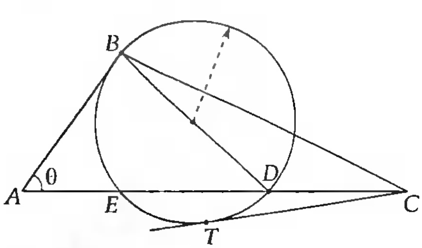
$$x^2=2(17)=34$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{34}$$

Clave **D**

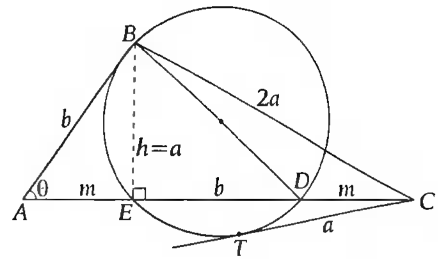
PROBLEMA N.° 43

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $AD=EC$, $AB=ED$ y $BC=2(TC)$, calcule θ.



A) 45°   B) 37°   C) 53°
D) 60°   E) 30°

Resolución



Si $AD=EC$, entonces

$$AE=DC=m$$

Sea $BE=h$; en el $\triangle ABC$

$$(2a)^2-(b+m)^2=b^2-m^2$$

$$4a^2=2b^2+2bm$$

$$2a^2=b^2+bm \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de la tangente

$$a^2=(b+m)(m)=bm+m^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$a^2+\cancel{bm}+m^2=b^2+\cancel{bm}$$

$$\rightarrow \quad b^2=a^2+m^2$$

⊿AEB: $b^2=m^2+h^2$, luego $h=a$

⊿BEC (notable de 30° y 60°)

$$(b+m)=a\sqrt{3} \text{ y } a^2=(a\sqrt{3})\cdot m$$

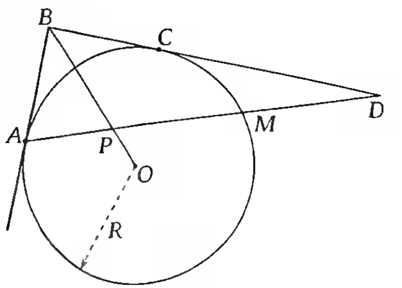
$$\rightarrow \quad a=m\sqrt{3}$$

$\therefore$ ⊿ABE: $\theta=60°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

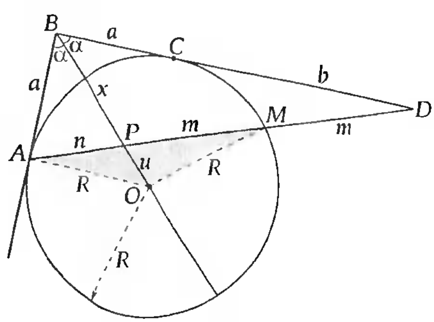
En el gráfico, A y C son puntos de tangencia. Si $PM=MD$, $AB^2+(AB)(CD)=88$ y $R^2-(OP)^2=26$, calcule BP.



A) $\sqrt{26}$ B) 8 C) 7

D) $2\sqrt{7}$ E) 6

Resolución



Sea $PM=MD=m$, $AP=n$, $OP=u$ y $BP=x$

También

$BC=a$ y $CD=b$

Del dato: $R^2-u^2=26$

Como

$BA=BC=a$

entonces

$(AB)^2+(AB)(CD)=88$

Reemplazando tenemos

$a^2+ab=88$

En el $\triangle ABD$, del teorema de la bisectriz

$x^2=a(a+b)-n(2m)=a^2+ab-2mn$ (I)

En el $\triangle AOM$

$u^2=R^2-mn$

Despejando

$mn=R^2-u^2=26$

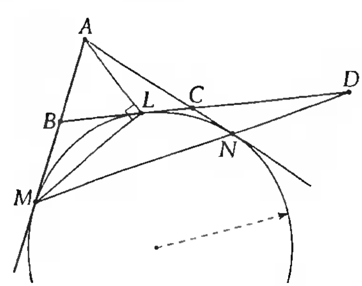
$\rightarrow x^2=88-2(26)=36$

$\therefore x=6$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 45

Según el gráfico, M, N y L son los puntos de tangencia. Si $LC=3$, $CD=12$, halle AL.



A) 4 B) 4,5 C) 5

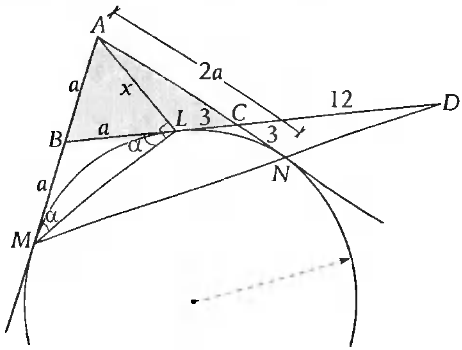
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

Resolución

En la circunferencia

$CN=CL=3$ y $MB=BL=a$

Luego, en el $\triangle ALM$: $AB=BL=a$



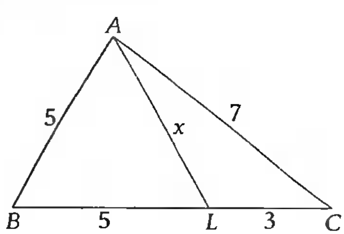
Para el triángulo ABC, $\overleftrightarrow{MND}$ es una recta externa; aplicando el teorema de Menelao tenemos

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{CN}{AN}\cdot\frac{BD}{CD}=1$$

$$\frac{2a}{a}\cdot\frac{3}{2a}\cdot\frac{15+a}{12}=1$$

$\rightarrow$ $a=5$ y $AC=7$

Luego, en el $\triangle ABC$



Aplicando el teorema de Stewart

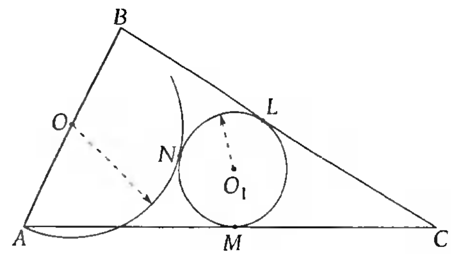
$$x^2\cdot 8+3\cdot 5\cdot 8=7^2\cdot 5+5^2\cdot 3$$

$\therefore$ $x=5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 46

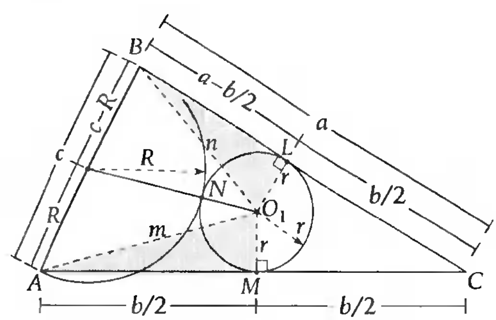
En el gráfico, M, N y L son puntos de tangencia. Si $AM=MC$, $(CO_1)^2+(AO)^2=80$ y $BC^2-BC\cdot AC-AB^2=64\cdot\dfrac{AB}{AO}$, determine la distancia de O a O_1.



A) 12 B) 24 C) 16

D) 36 E) 48

Resolución



En el $\triangle AO_1M$: $m^2=\dfrac{b^2}{4}+r^2$ (I)

En el $\triangle BO_1L$: $n^2=a^2-ab+\dfrac{b^2}{4}+r^2$ (II)

En el $\triangle AO_1B$, aplicamos el teorema de Stewart

$$m^2(c-R)+n^2(R)=x^2c+R(c-R)(c)$$

$$cm^2+R(n^2-m^2)=x^2c+cR(c-R) \qquad \text{(III)}$$

De (II) – (I)

$$n^2-m^2=a(a-b)$$

Luego

$$cm^2+aR(a-b)=x^2c+cR(c-R) \qquad \text{(IV)}$$

Del dato:

$$CO_1=AO_1=m \;\rightarrow\; m^2+R^2=80 \text{ y}$$

$$a^2-ab-c^2=\frac{64c}{R}$$

$$aR(a-b)=64c+c^2R \qquad \text{(V)}$$

De (V) en (IV)

$$cm^2+64c+c^2R=x^2c+cR(c-R)$$

$$m^2+64+cR=x^2+cR-R^2$$

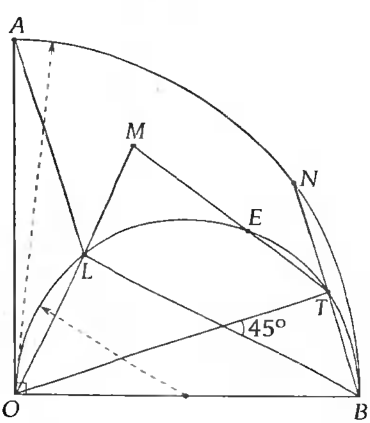
$$\underbrace{R^2+m^2}_{80}+64=x^2$$

$\therefore\; x=12$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 47

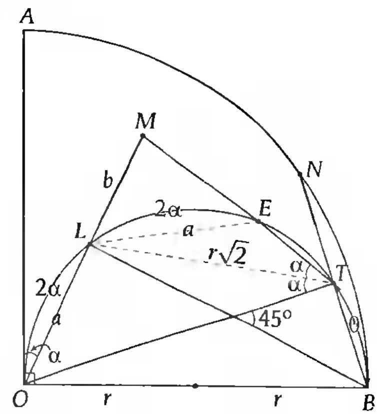
En el gráfico mostrado, $m\overset{\frown}{OLE}=4(m\measuredangle AOL)$; $(MT)(TO)=36$ y $(ML)(LE)=20$. Calcule AO.



A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$ E) 8

Resolución



Si $m\measuredangle AOL=\alpha$, $m\overset{\frown}{OLE}=4\alpha$ por ángulo semiinscrito: $m\overset{\frown}{OL}=2\alpha$

$$m\overset{\frown}{LE}=2\alpha$$

$$\rightarrow\; OL=LE=a \text{ y}$$

$$m\measuredangle ETL=m\measuredangle OTL=\alpha$$

Si la medida del ángulo formado por $\overline{OT}$ y $\overline{BL}$ es 45°, entonces $m\overset{\frown}{OL}+m\overset{\frown}{TB}=90°$

Luego, $m\overset{\frown}{LET}=90°$ y $LT=r\sqrt{2}$

En el $\triangle OTM$, teorema de la bisectriz:

$$(r\sqrt{2})^2=(MT)(TO)-a\cdot b$$

$$2r^2=36-20=16$$

$$\rightarrow\; r=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\; AO=2r=4\sqrt{2}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 48

En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, las prolongaciones de las cuerdas $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ se intersecan en M, luego se traza la cuerda $\overline{CQ}$ perpendicular a $\overline{AD}$ en H. Si $m\sphericalangle BDC+m\sphericalangle ADQ=90°$ y $(MC)(CD)-(MA)(AB)=36$, halle AC.

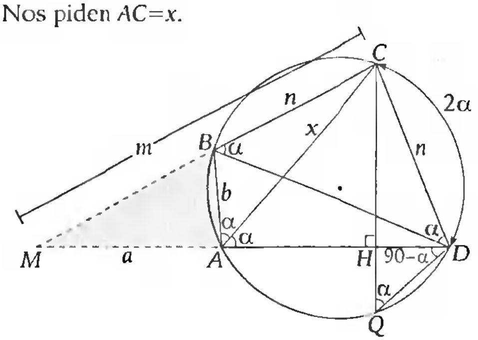
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Según condición:

$$(MC)(CD)-(MA)(AB)=36$$

Nos piden $AC=x$.



Si $m\sphericalangle BDC=\alpha$, entonces $m\sphericalangle ADQ=90°-\alpha$

$m\sphericalangle CQD=\alpha$

Luego, $m\overset{\frown}{CD}=2\alpha$ y $m\sphericalangle CAD=m\sphericalangle CBD=\alpha$

También $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BDC=\alpha$

En el $\triangle MAB$, $\overline{AC}$ es bisectriz exterior.

Del teorema de la longitud de la bisectriz exterior

$$x^2=mn-ab$$

Pero

$$\underbrace{(MC)}_{m}\underbrace{(CD)}_{n}-\underbrace{(MA)}_{a}\underbrace{(AB)}_{b}=36$$

Entonces

$$x^2=36$$

$\therefore\ x=6$

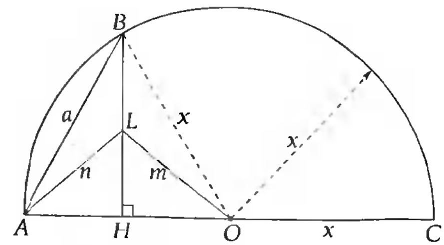
Clave **C**

PROBLEMA N.° 49

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y centro O, se trazan la cuerda $\overline{AB}$ y $\overline{BH}\perp\overline{AC}$ ($H\in\overline{AC}$), luego en $\overline{BH}$ se ubica L, tal que $(AB)^2+(OL)^2-(AL)^2=36$. Calcule CO.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución



Del dato:

$$(AB)^2+(OL)^2-(AL)^2=36$$

Es decir

$$a^2+m^2-n^2=36$$

Como $BO=OC=x$, aplicamos el teorema de proyecciones en el $\triangle ABO$

$$x^2-a^2=(OH)^2-(AH)^2 \qquad \text{(I)}$$

Análogamente en el $\triangle ALO$

$$m^2-n^2=(OH)^2-(AH)^2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

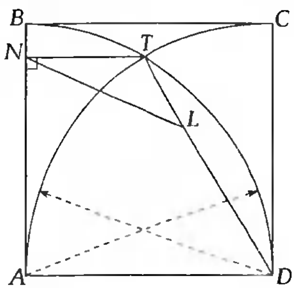
$$x^2-a^2=m^2-n^2 \;\rightarrow\; x^2=a^2+m^2-n^2=36$$

$\therefore\; x=6$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 50

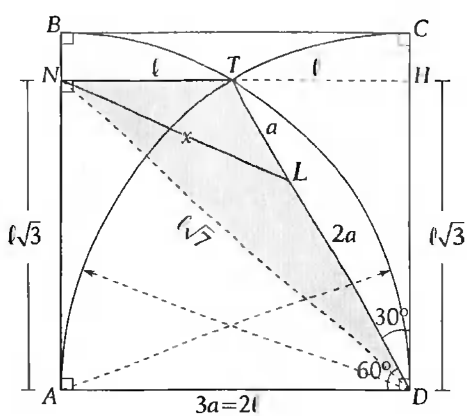
En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Si $2(TL)=LD$ y $NT=\ell$, determine NL.



A) $\dfrac{3\ell}{2}$ B) $\dfrac{4\ell}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{17}\ell}{4}$

D) $\dfrac{3\sqrt{2}\ell}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{19}\ell}{3}$

Resolución



Sea: $2(TL)=LD=2a$

Como $AD=DT=3a$, también

$$TH=TN=\ell$$

Además

$$m\measuredangle TDH=30° \;\rightarrow\; HD=\ell\sqrt{3}$$

Pero

$$AN=HD=\ell\sqrt{3} \;\rightarrow\; ND=\ell\sqrt{7}$$

Luego, en el $\triangle NTD$ por el teorema de Stewart

$$x^2(3a)+a(2a)(3a)=\left(\ell\sqrt{7}\right)^2(a)+(\ell)^2(2a)$$

$$3x^2+6a^2=7\ell^2+2\ell^2=9\ell^2$$

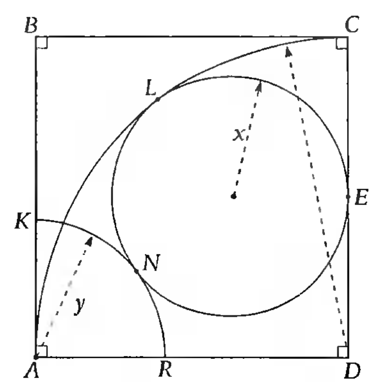
$$3x^2+6\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2=9\ell^2$$

$$\therefore\; x=\frac{\ell\sqrt{19}}{3}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 51

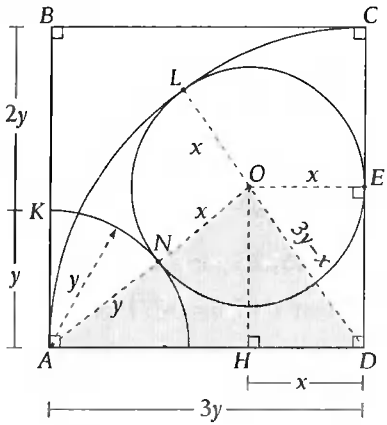
En el gráfico mostrado, N, L y E son puntos de tangencia. Si $BK=2(KA)$, calcule $\dfrac{x}{y}$.



A) 17/14 B) 15/13 C) 9/7

D) 19/14 E) 17/13

Resolución



Si $BK=2(KA)$, entonces $BK=2y$

$AB=AD=DL=3y$

$HD=OE=OL=x$

$\rightarrow\ AO=x+y;\ OD=3y-x$

En el $\triangle AOD$, del teorema de Euclides

$(x+y)^2=(3y-x)^2+(3y)^2-2(3y)(x)$

$x^2+2xy+y^2=9y^2-6xy+x^2+9y^2-6xy$

$14xy=17y^2$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{17}{14}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 52

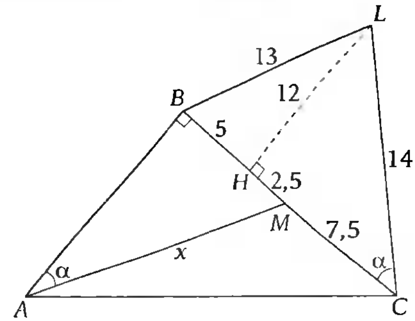
En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubican los puntos M y L en $\overline{BC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, respectivamente, tal que $m\measuredangle BCL=m\measuredangle BAM$; $BM=MC$; $CL=14$; $BL=13$ y $CM=7{,}5$. Halle AM.

A) 9 B) 12,5 C) 25/3
D) 7,5 E) 75/8

Resolución

Por dato:

$BM=MC=7{,}5\ \rightarrow\ BC=15$



En el $\triangle BLC$ aplicamos el teorema de Euclides

$(14)^2=(13)^2+(15)^2-2(15)(BH)$

$BH=5\ \rightarrow\ HC=9$ y $LH=12$

En el ⊿HLC: $\alpha=53°$

Luego, en el ⊿ABM

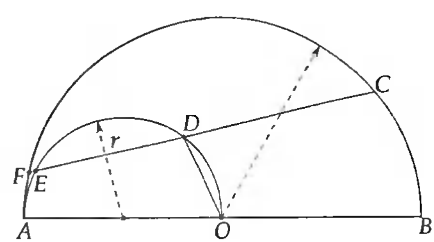
$\dfrac{x}{5}=\dfrac{7{,}5}{4}=\dfrac{5\times 15}{8}$

$\therefore\ x=\dfrac{75}{8}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 53

En el gráfico, $(2r)^2-(FD)(DC)=49$. Calcule DO.

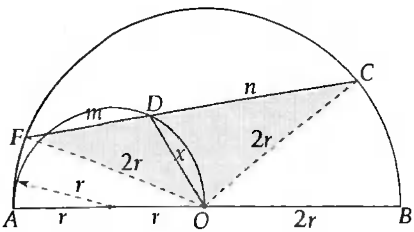


A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Dato:

$(FD)(DC)=m\cdot n \;\rightarrow\; 4r^2-mn=49$



$OF=OC=OA=OB=2r$

En el $\triangle FOC$, del caso particular de Stewart para un triángulo isósceles

$x^2=(2r)^2-mn=49$

$\therefore\; x=7$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 54

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle BCA=3(m\sphericalangle BAC)$; $AB=c$ y $BC=a$. Calcule AC.

A) $\dfrac{(c-a)}{a}\sqrt{a(a+c)}$

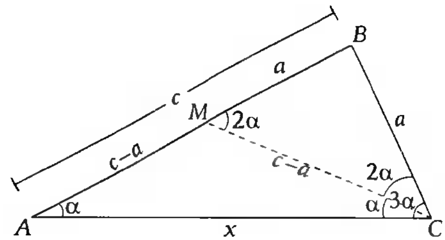
B) $\dfrac{(c-a)}{c}\sqrt{c(a+c)}$

C) $\dfrac{(a+c)}{c}\sqrt{c(a+c)}$

D) $\dfrac{a+c}{c}\sqrt{a(a+c)}$

E) $\dfrac{(a+c)}{a}\sqrt{a(a+c)}$

Resolución



Trazamos $\overline{CM}$, de manera que

$m\sphericalangle ACM=m\sphericalangle CAM=\alpha$, entonces

$m\sphericalangle AMB=m\sphericalangle MCB=2\alpha$

$BM=BC=a \;\rightarrow\; AM=c-a=MC$

Aplicando el teorema de Stewart en el $\triangle ABC$

$$(c-a)^2(c)+a(c-a)(c)=x^2(a)+a^2(c-a)$$

$$(c-a)\left(c^2-\cancel{ca}+\cancel{ca}-a^2\right)=x^2(a)$$

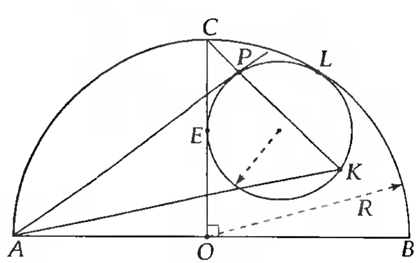
$$\frac{(c-a)^2(c+a)}{a}=x^2$$

$$\therefore\; x=\frac{(c-a)}{a}\sqrt{a(c+a)}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 55

En el gráfico, E, L y P son puntos de tangencia. Si $(AK)^2-(KC)^2=a^2$ y $CE=b$, determine R.



A) $\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{2}}$ B) $\sqrt{a^2-b^2}$

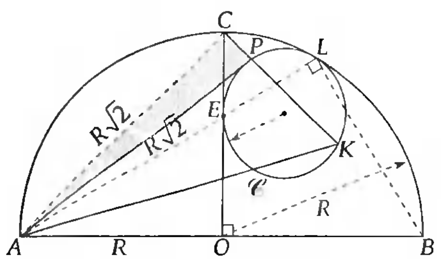
C) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Resolución

Del enunciado tenemos:

$(AK)^2-(KC)^2=a^2$, $CE=b$ y $R=?$



Del tema de circunferencia A, E y L son colineales y como la $m\sphericalangle ALB=90°$, el cuadrilátero $OELB$ es inscriptible, donde

$$AL \cdot AE = AB \cdot AO = (2R)(R) = 2R^2$$

Pero en $\mathscr{C}$

$$AL \cdot AE = AP^2 \quad \rightarrow \quad AP = R\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema de Stewart en el $\triangle ACP$

$$(AK)^2 = (AC)(AP) + (CK)(PK)$$

Pero $PK = CK - CP$ y $AC = AP = R\sqrt{2}$

Luego

$$(AK)^2 = 2R^2 + (CK)^2 - (CK)(CP)$$

$$\rightarrow \quad (AK)^2 - (KC)^2 = 2R^2 - (CK)(CP) \qquad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}$

$$(CE)^2 = (CK)(CP) \quad \rightarrow \quad (CK)(CP) = b^2 \quad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I) y del dato tenemos:

$$a^2 + b^2 = 2R^2$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 56

En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en T y la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$, es tangente a $\overline{BC}$ en Q. Si $AB=6$; $AC=3$ y $BC=5$, calcule QT.

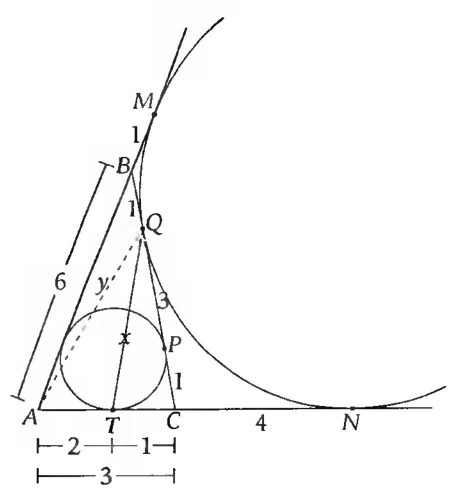
A) $\sqrt{\dfrac{263}{15}}$ B) $\sqrt{\dfrac{236}{15}}$ C) $\dfrac{1}{4}\sqrt{263}$

D) $\sqrt{\dfrac{185}{6}}$ E) $\sqrt{\dfrac{158}{5}}$

Resolución

Por dato: $BC=5$

Como $AM = AN = p_{(\triangle ABC)}$



Tenemos

$$p=\frac{3+6+5}{2}=7 \quad \rightarrow \quad AM=AN=7$$

Luego

$CN=4$ y $BM=1=BQ$

En el $\triangle ABC$

$CT=p-6=1$

Luego

$CP=CT=1$; $AT=2$; $PQ=3$

Para calcular x debemos conocer primero $AQ=y$.

En el $\triangle ABC$, usando el teorema de Stewart

$$(3)^2(1)+(6)^2(4)=(y^2)(5)+(1)(4)(5)$$

$$y^2=\frac{133}{5}$$

En el $\triangle AQC$, usando el teorema de Stewart

$$(y^2)(1)+(4^2)(2)=x^2(3)+(2)(1)(3)$$

Reemplazamos y^2

$$\therefore \quad x=\sqrt{\frac{263}{15}}$$

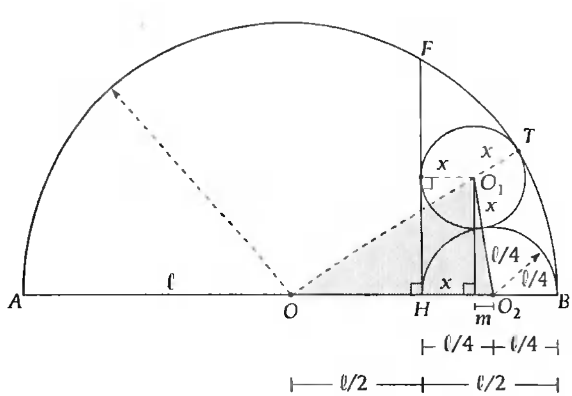
Clave **A**

PROBLEMA N.° 57

Desde un punto F de una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se traza $\overline{FH}$ perpendicular a $\overline{AB}$, tal que H es punto medio de $\overline{OB}$ y con diámetro $\overline{HB}$ se traza interiormente una semicircunferencia. Si $OA=\ell$, calcule la longitud del radio de la circunferencia tangente a $\overline{FH}$ y a las dos semicircunferencias.

A) $\frac{\ell}{5}$ B) $\frac{\ell}{7}$ C) $\frac{\ell}{9}$ D) $\frac{3\ell}{16}$ E) $\frac{\ell}{6}$

Resolución



Tenemos

$$OT=\ell \rightarrow OO_1=\ell-x$$

Si $OH=HB=\dfrac{\ell}{2}$, entonces $HO_2=O_2B=\dfrac{\ell}{4}$

Por lo tanto, $O_1O_2=\dfrac{\ell}{4}+x$

En el $\triangle OO_1O_2$: $m=\dfrac{\ell}{4}-x$

Usamos el teorema de Euclides en OO_1O_2:

$$(\ell-x)^2=(OO_2)^2+(O_1O_2)^2-2(OO_2)\cdot m$$

$$\rightarrow \quad (\ell-x)^2=\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2+\left(x+\frac{\ell}{4}\right)^2-2\left(\frac{3\ell}{4}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{4}-x\right)$$

$$\ell^2-2\ell x+x^2=\frac{9\ell^2}{16}+x^2+\frac{x\ell}{2}+\frac{\ell^2}{16}-\frac{3\ell^2}{8}+\frac{3\ell x}{2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{3\ell^2}{4}=4\ell x$$

$$\therefore \quad x=\frac{3\ell}{16}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 58

En un paralelogramo $ABCD$, m$\measuredangle BAD=60°$; $AB=18$; $BC=24$; se traza una circunferencia que contiene a C e intersecta a $\overline{BC}$ en P, a la diagonal $\overline{AC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{CD}$ en S. Si $PQ=6$, calcule SP.

A) $3\sqrt{37}$

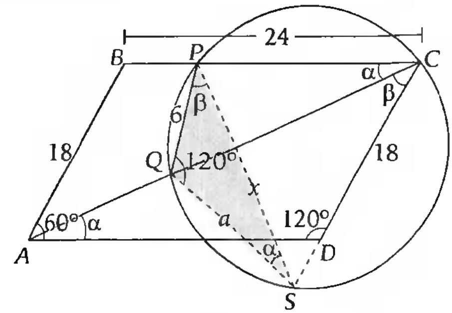
B) $5\sqrt{27}$

C) $2\sqrt{27}$

D) $2\sqrt{37}$

E) $50\sqrt{11}$

Resolución



En el cuadrilátero inscrito $PQSC$

$$m\measuredangle QPS=m\measuredangle QCS=\beta$$

$$m\measuredangle QSP=m\measuredangle QCP=\alpha$$

Como $\alpha+\beta=60°$, entonces m$\measuredangle PQS=120°$

Además, $\triangle PQS \sim \triangle CDA$

$$\frac{a}{24}=\frac{6}{18} \rightarrow a=8$$

Luego en PQS (usando el teorema de cosenos)

$$x^2=6^2+8^2-2(6)(8)\cos 120°$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 59

En un triángulo ABC, recto en B, se traza una circunferencia tangente a la hipotenusa en su punto medio y al cateto mayor BC, y con centro en el punto P del otro cateto y radio PA se traza una circunferencia tangente a la primera. Si $AC=b$ y $AB=c$, calcule PA sabiendo que $(AC)^2=2AB\cdot r+BC\cdot AC$

Además, r es el radio de la circunferencia tangente a la hipotenusa.

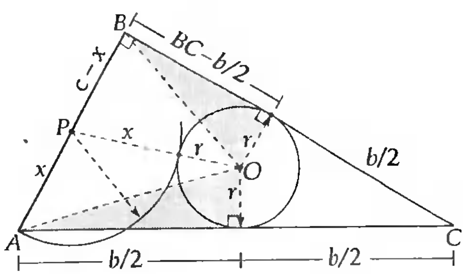
A) $\dfrac{b^2}{4c}$ B) $\dfrac{b^2}{8c}$

C) $\dfrac{b^2}{2c}$

D) $\dfrac{b^2}{b+c}$ E) $\dfrac{b^2}{\sqrt{2c}}$

Resolución

Sabemos que $(AC)^2=2AB\cdot r+BC\cdot AC$.



En el $\triangle AOB$, del teorema de Stewart

$$(OA)^2PB+(OB)^2\cdot AP=(PO)^2\cdot AB+AB\cdot AP\cdot PB$$

$$\left(r^2+\frac{AC^2}{4}\right)(c-x)+\left(r^2+\left(BC-\frac{AC}{2}\right)^2\right)\cdot x=$$

$$=(x+r)^2\,AB+AB\cdot x(c-x)$$

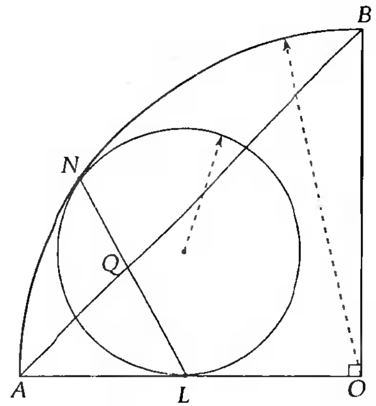
$$\frac{(AC)^2\cdot c}{4}+(AC)^2x=2(AB)\cdot r\cdot x+BC\cdot AC\cdot x+2c^2\cdot x$$

$$\therefore\ x=\frac{(AC)^2}{8c}=\frac{b^2}{8c}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 60

En el gráfico, M y N son puntos de tangencia. Si $2(AO)(LO)-(NQ)(QL)=49$, calcule BQ.

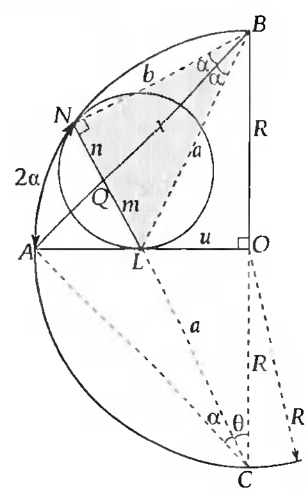


A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) $7\sqrt{2}$

Resolución

Nos piden $BQ=x$.



Dato: $2(AO)(LO)-(NQ)(QL)=49$

$2(R)(u)-n\cdot m=49$

Pero $LB=LC=a$

$\triangle CLO \sim \triangle CBN$

$$\frac{u}{b}=\frac{a}{2R} \rightarrow ab=2R\cdot u$$

Reemplazamos en el dato: $a\cdot b-m\cdot n=49$

Finalmente, en el $\triangle LBN$ (teorema del cálculo de bisectriz)

$$x^2=ab-mn=49$$

$\therefore\ x=7$

Clave **C**

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

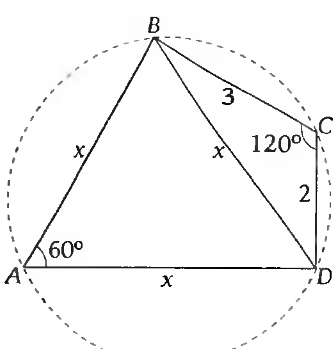
PROBLEMA N.° 61

En un cuadrilátero $ABCD$, inscriptible, se cumple que $AB=BD=AD$. Si $BC=3$ y $CD=2$, calcule AB.

A) $\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{19}$
D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{31}$

Resolución

Por dato: $AB=BD=AD=x$



Como $ABCD$ es inscriptible y como la

$$m\sphericalangle BAD=60°$$

$$\rightarrow\ m\sphericalangle BCD=120°$$

En el $\triangle BCD$

$$x^2=3^2+2^2-2(3)(2)\cos 120°$$

$$x^2=9+4+6=19$$

$\therefore\ x=\sqrt{19}$

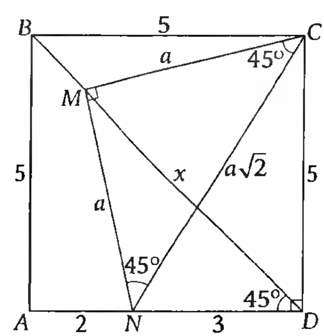
Clave **C**

PROBLEMA N.° 62

En un cuadrado $ABCD$, en $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ se ubican los puntos N y M, respectivamente, tal que la $m\sphericalangle MCN=45°$, $AN=2$ y $BD=5\sqrt{2}$. Halle DM.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2{,}5\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $3{,}5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

Resolución



Si la $m\sphericalangle MCN=45°$ y $m\sphericalangle NDM=45°$, entonces el cuadrilátero $MCDN$ es inscriptible; por lo tanto, la $m\sphericalangle NMC=90°$; luego la $m\sphericalangle MNC=45°$.

Si $MC=a \rightarrow MN=a$ y $NC=a\sqrt{2}$

Del dato:

$$BD=5\sqrt{2}$$

$$\rightarrow AB=CD=AD=5$$

Como $AN=2$, entonces $ND=3$.

En $\triangle NMCD$, del teorema de Ptolomeo

$$MD \cdot NC=MN \cdot CD+MC \cdot ND$$

$$x \cdot (a\sqrt{2})=a \cdot 5+a \cdot 3=8a$$

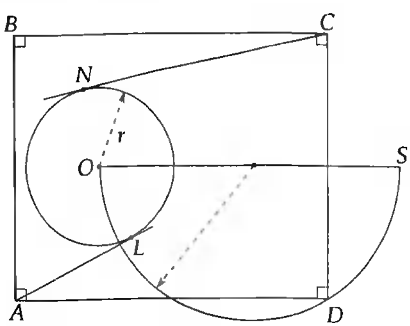
Luego

$$x=4\sqrt{2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 63

En el gráfico, N y L son puntos de tangencia, $DS=OB$ y $SO=4r$.
Calcule $(NC^2+AL^2)^{1/2}$.



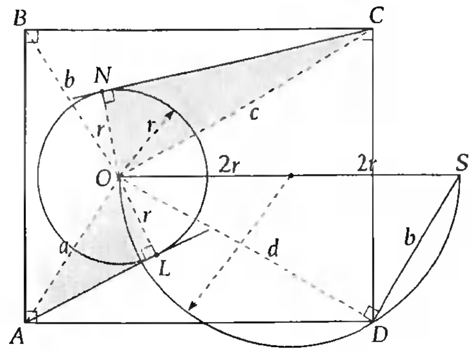
A) $r\sqrt{14}$ B) $r\sqrt{15}$ C) $2r\sqrt{13}$
D) $r\sqrt{17}$ E) $r\sqrt{22}$

Resolución

Del dato:

$$DS=OB=b;$$

$$SO=4r$$



Del teorema de Marlen en $ABCD$

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

Pero

$$a^2=(AL)^2+r^2$$

$$c^2=(CN)^2+r^2$$

$$\rightarrow (AL)^2+(CN)^2+2r^2=b^2+d^2$$

En el $\triangle ODS$

$$b^2+d^2=(4r)^2=16r^2$$

$$(AL)^2+(NC)^2=16r^2-2r^2$$

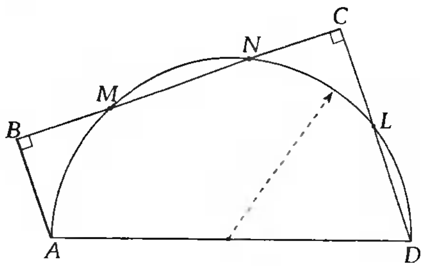
$$(AL)^2+(NC)^2=14r^2$$

$$\therefore \left((NC)^2+(AL)^2\right)^{\frac{1}{2}}=r\sqrt{14}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 64

En el gráfico, $BM+NC=4$ y $CL=LD=3$. Determine $(AN)\cdot(MD)$.

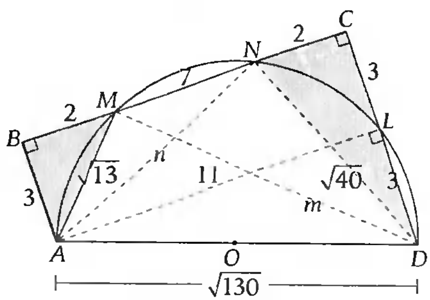


A) $6\sqrt{13}$ B) $14\sqrt{7}$ C) $7\sqrt{130}$

D) $9\sqrt{65}$ E) $9\sqrt{130}$

Resolución

Según condición: $BM+NC=4$; $CL=LD=3$



Como la $m\sphericalangle ALD=90°$, entonces $\overline{AL}//\overline{BC}$

$AM=NL$ y $AB=LC$ $\rightarrow$ $BM=NC=2$

Como $CM\cdot CN=CD\cdot CL$

reemplazamos valores

$CM\cdot(2)=(6)(3)$

$CM=9$ $\rightarrow$ $MN=7$

Si $AL=BC=11$,

luego $AD=\sqrt{11^2+3^2}=\sqrt{130}$

En $\triangle ABM$: $AM=\sqrt{13}$ y en $\triangle DCN$: $ND=\sqrt{40}$

En $\square AMND$, del teorema de Ptolomeo

$$m\cdot n=(\sqrt{40})(\sqrt{13})+7(\sqrt{130})=9\sqrt{130}$$

$\therefore$ $(AN)(MD)=9\sqrt{130}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 65

En el gráfico, $(BT^2+DT^2+FT^2)-(AT^2+GT^2)=7$. Determine TE.

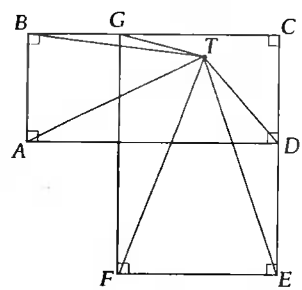
A) $\sqrt{5}$

B) $\sqrt{6}$

C) $\sqrt{7}$

D) $2\sqrt{2}$

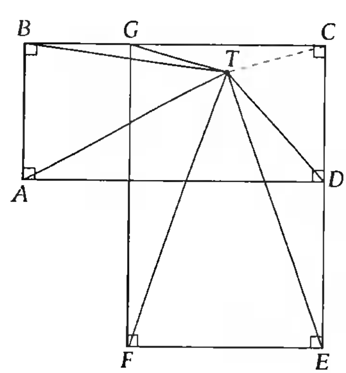
E) 3



Resolución

Sabemos que

$$(BT^2+DT^2+FT^2)-(AT^2+GT^2)=7$$



Utilizando el teorema de Marlen en los rectángulos $ABCD$ y $CEFG$

$$AT^2+TC^2=BT^2+TD^2 \quad \text{(I)}$$

$$FT^2+TC^2=GT^2+TE^2 \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$AT^2-FT^2=BT^2+TD^2-GT^2-TE^2$$

$$(TE)^2=(BT^2+DT^2+FT^2)-(AT^2+GT^2)$$

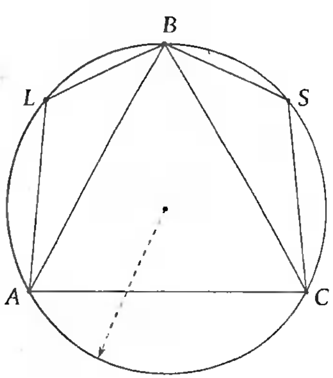
$$(TE)^2=7$$

$$\therefore\ TE=\sqrt{7}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 66

En el gráfico se muestra un triángulo equilátero ABC. Si $AL-BS=17$ cm y $AS=CL$, determine $SC-LB$.

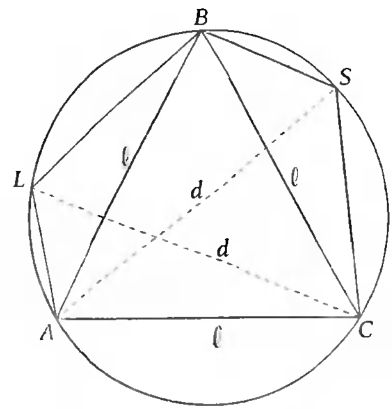


A) 14 cm
B) 15 cm
C) 16 cm
D) 17 cm
E) 18 cm

Resolución

Sea $AL-BS=17$

Nos piden $SC-LB$.



En ⏢$ALBC$, del teorema de Ptolomeo

$$\ell\cdot d=\ell(AL)+\ell(LB)$$

$$d=(AL)+(LB) \quad \text{(I)}$$

En ⏢$ABSC$, del teorema de Ptolomeo

$$\ell\cdot d=\ell(SC)+\ell(BS)$$

$$d=(SC)+(BS) \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$AL+LB=SC+BS$$

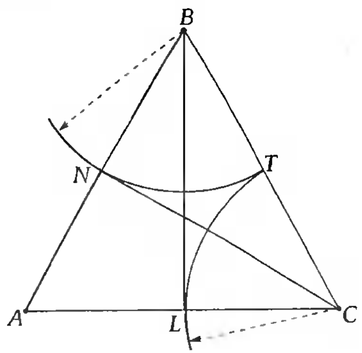
$$AL-BS=SC-LB$$

$$\therefore\ SC-LB=17 \text{ cm}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 67

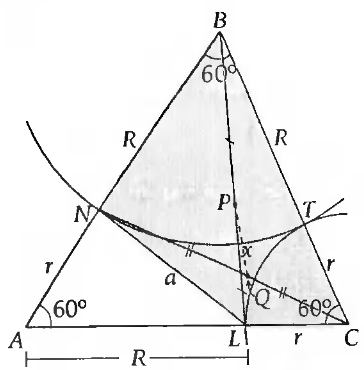
En el gráfico, $AB=BC=CA$, T es punto de tangencia y $NL=a$. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BL}$ y $\overline{CN}$.



A) $a/4$ B) $a/3$ C) $a/5$
D) $a/2$ E) $2a/3$

Resolución

Nos piden $PQ=x$.



$CL=CT=r$ y $BT=BN=R$

Entonces, como el $\triangle ABC$ es equilátero

$AL=R$ y $AN=r$

Luego, $\triangle NBC \cong \triangle RAB$, caso (L. A. L.)

$BL=NC$

Aplicando el teorema de Euler en $\square LNBC$

$$a^2+R^2+(R+r)^2+r^2=BL^2+NC^2+4x^2$$

$$a^2+2(R^2+r^2+Rr)=2(BL)^2+4x^2 \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle ABL$

$$(BL)^2=R^2+(R+r)^2-2(R)(R+r)\cos 60°$$

(teorema de cosenos)

$$(BL)^2=2R^2+2Rr+r^2-R^2-Rr$$

$$(BL)^2=R^2+r^2+Rr \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore\ x=\frac{a}{2}$$

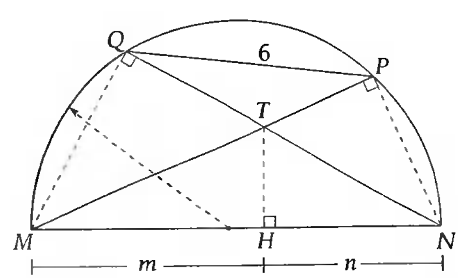
Clave D

PROBLEMA N.° 68

En una semicircunferencia de diámetro MN se trazan las cuerdas MP y NQ, las cuales se intersecan en T. Si $(MT)(MP)+(NT)(NQ)=64$ y $PQ=6$, calcule $(NQ)(MP)-(MQ)(NP)$.

A) 64 B) 100 C) 96
D) 24 E) 48

Resolución



Como nos piden $(NQ)(MP)-(MQ)(NP)$ usamos el teorema de Ptolomeo en el $\square MQPN$

$(MP)(NQ)=(MQ)(NP)+(MN)(PQ)$, entonces

$$(NQ)(MP)-(MQ)(NP)=(MN)(6) \qquad \text{(I)}$$

Solo falta conocer MN. Como los cuadriláteros $MQTH$ y $NPTH$ son inscriptibles, aplicamos el teorema de la secante

En $MQTH$

$$NQ\cdot NT=NM\cdot n \qquad \text{(II)}$$

En $NPTH$

$$MP\cdot MT=MN\cdot m \qquad \text{(III)}$$

Sumando (II) y (III)

$$MT\cdot MP+NT\cdot NQ=MN\underbrace{(m+n)}_{MN}=MN^2$$

Luego, por dato

$$MN=8 \qquad \text{(IV)}$$

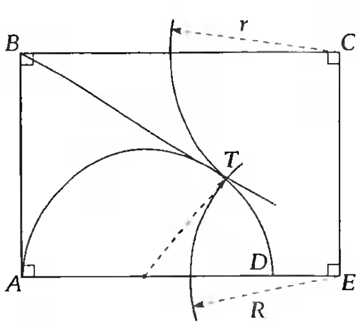
Finalmente, de (I) y (IV)

$$(NQ)(MP)-(MQ)(NP)=8\times 6=48$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 69

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $AD=30$ y $AB=20$, calcule $\sqrt{R^2-r^2}$.



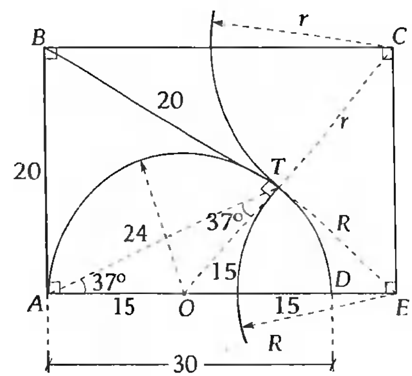
A) $4\sqrt{11}$ B) $3\sqrt{11}$

C) $\sqrt{167}$

D) $\sqrt{166}$ E) $4\sqrt{13}$

Resolución

Nos piden calcular $\sqrt{R^2-r^2}$.



Si $AD=30$, entonces $AO=OD=OT=15$

Como $AB=20=BT$, luego

$$m\sphericalangle OAT=m\sphericalangle OTA=37°$$

$$\rightarrow \quad AT=24$$

En $ABCE$, del teorema de Marlen

$$24^2+r^2=20^2+R^2$$

Por ello

$$R^2-r^2=24^2-20^2$$

$$R^2-r^2=(24-20)(24+20)=4\times 44$$

$$\therefore \quad \sqrt{R^2-r^2}=4\sqrt{11}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 70

En un cuadrado $ABCD$, en $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos N y M, respectivamente, $\overline{BD} \cap \overline{NC}=\{P\}$; $\overline{CM} \cap \overline{BD}=\{Q\}$, $m\measuredangle NCN=45°$ $AN=6$ y $ND=2$. Calcule PQ.

A) $\dfrac{17\sqrt{5}}{2}$

B) $\dfrac{17\sqrt{2}}{5}$

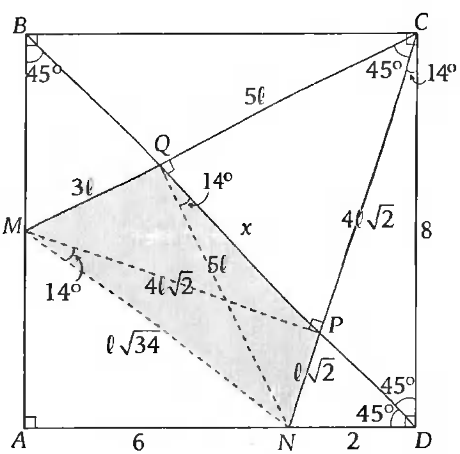
C) $\dfrac{16\sqrt{5}}{7}$

D) $\dfrac{18\sqrt{2}}{5}$

E) $\dfrac{17\sqrt{5}}{5}$

Resolución

Si $AN=6$; $ND=2$, entonces $CD=8$



Como la $m\measuredangle NDQ=45°$,

por ello $NQCD$ es inscriptible:

$m\measuredangle NQC=90°$; $QN=QC$

También $MPCB$ es inscriptible

$m\measuredangle MPC=90°$; $MP=PC$

En el $\triangle NDC$, del teorema de la bisectriz

$$\frac{NP}{PC}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Si $NP=\ell\sqrt{2}$, entonces

$PC=MP=4\ell\sqrt{2}$;

$QC=QN=5\ell$

$MQ=3\ell$

$MN=\ell\sqrt{34}$

En el cuadrilátero inscriptible $MNPQ$, del teorema de Ptolomeo

$$(4\ell\sqrt{2})(5\ell)=x(\ell\sqrt{34})+(\ell\sqrt{2})(3\ell)$$

$$x=\ell\sqrt{17}$$

Pero

$NC=5\ell\sqrt{2}=2\sqrt{17}$

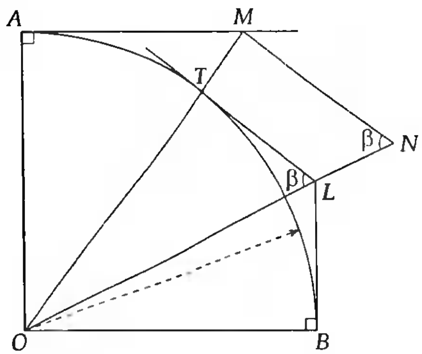
$$\rightarrow \quad \ell=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\therefore \quad x=\frac{17\sqrt{2}}{5}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 71

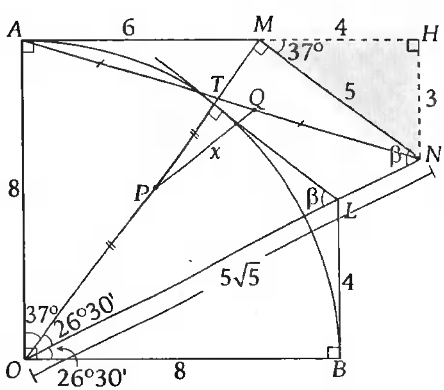
En el gráfico, T es punto de tangencia, $m\overset{\frown}{AT}=37°$ y $MO=10$. Determine la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AN}$ y $\overline{MO}$.



A) $\dfrac{\sqrt{31}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{51}}{2}$ C) $\sqrt{10}$

D) $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$

Resolución



T: punto de tangencia

Luego, la m$\sphericalangle OTL=90°$

Además, $\overline{LT}//\overline{NM}$ y m$\sphericalangle OMN=90°$

Si $OM=10$; $MA=6$; $AO=8$

Como la $m\sphericalangle LOT=m\sphericalangle LOB=\dfrac{53°}{2}=26°30'$

Si $OM=10$; $MN=5$ y $ON=5\sqrt{5}$

Como la m$\sphericalangle OMN=90°$,
entonces la m$\sphericalangle NMH=37°$

Luego, $MH=4$ y $NH=3$. En el ⊿AHN:

$$(AN)^2=(AH)^2+(HN)^2=(10)^2+(3)^2=109$$

En $OAMN$, del teorema de Euler para cuadriláteros

$$OA^2+AM^2+MN^2+ON^2=OM^2+AN^2+4x^2$$

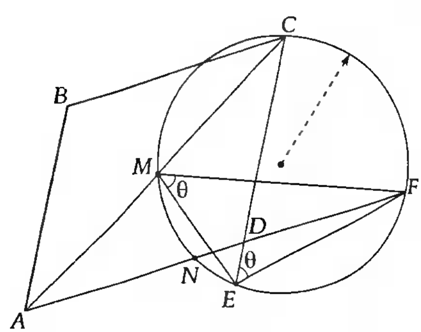
$$8^2+6^2+5^2+(5\sqrt{5})^2=10^2+109+4x^2$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 72

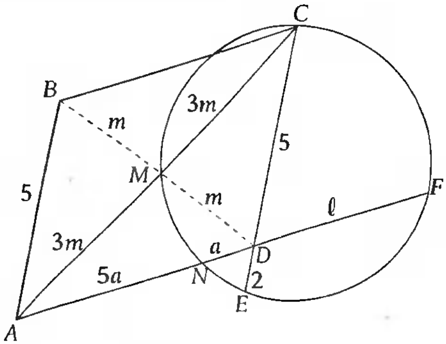
En el gráfico, $AM=MC$, $ABCD$ es un paralelogramo, $AN=5(ND)$, $AM=3(MD)$, $AB=5$ y $DE=2$. Calcule AC^2+BD^2.



A) 870 B) 780 C) 578
D) 785   E) 875

Resolución

Sea $AM=3a$, entonces $MD=a$.



Pero $AM=MC=3a$ y $BM=MD=a$

por ser M centro del paralelogramo $ABCD$.

Piden AC^2+BD^2

$$(AC)^2+(BD)^2=(6m)^2+(2m)^2$$

$$\rightarrow\ (AC)^2+(BD)^2=40m^2$$

Si $ND=a$; entonces $AN=5a$ y $BC=6a$

En todo paralelogramo se cumple que

$$(AB)^2+(BC)^2=\frac{1}{2}(BD^2+AC^2)$$

$$(AC^2+BD^2)=2(AB^2+BC^2)$$

$$(AC^2+BD^2)=2(5^2+(6a)^2)$$

$$20m^2=25+36a^2 \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de la secante

$$(6m)(3m)=(6a+\ell)(5a)=30a^2+5a\ell$$

Pero $a\cdot\ell=(5)(2)$ (teorema de las cuerdas), luego

$$9m^2=15a^2+25 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

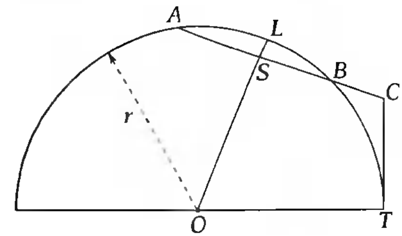
$$8m^2=175$$

$$\therefore\ 40m^2=875$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 73

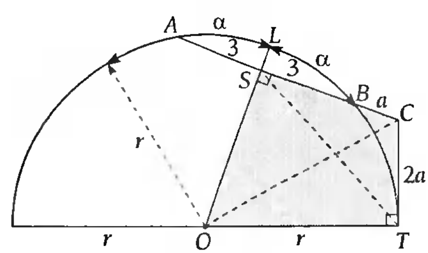
En el gráfico, $m\widehat{AL}=m\widehat{LB}$, T es punto de tangencia, $AB=6$, $CT=2(BC)$ y $(TS)(CO)-4(OS)=16$. Calcule $5r$.



A) 32 B) 16 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución

Sea $CT=2a=2(BC)$, de donde $BC=a$.



Si $m\widehat{AL}=m\widehat{LB}=\alpha$, entonces

$\overline{OS}\perp\overline{AB}$ y

$AS=SB=3$

Del teorema de la tangente

$$(CT)^2=(CA)(CB)$$

$$(2a)^2=(a+6)(a)$$

$$\rightarrow\ a=2$$

Luego

$CS=5$ y $TC=4$

En el cuadrilátero inscriptible $OSCT$, del teorema de Ptolomeo

$$(OC)(ST)=(OS)(CT)+(SC)(OT)$$
$$(TS)(CO)=(OS)(4)+(5)(r)$$
$$\rightarrow\ 5r=(TS)(CO)-4(OS)$$

Del dato:

$$(TS)(CO)-4(OS)=16$$

$\therefore\ 5r=16$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 74

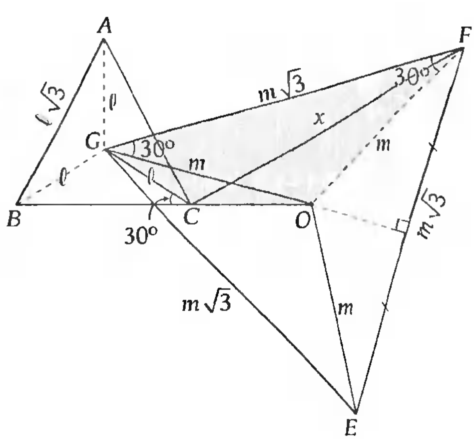
Sobre la prolongación del lado BC del triángulo equilátero ABC se ubica el punto O, luego se traza el triángulo equilátero GEF, donde G y O son baricentros de dichos triángulos (F exterior relativo al lado AC).

Si $\dfrac{(AB)}{\sqrt{3}}+(CO)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$, calcule FC.

A) $4\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$

D) $7\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

Resolución



$m\sphericalangle GCB=30°$

$m\sphericalangle OFG=30°$

$GCOF$: cuadrilátero inscriptible, del teorema de Ptolomeo

$$x\cdot m=\ell\cdot m+CO\cdot m\sqrt{3}$$
$$x=\ell+(CO)\sqrt{3}$$

Del dato:

$$\frac{AB}{\sqrt{3}}+(CO)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

Como $AB=\ell\sqrt{3}$, entonces

$$\ell+(CO)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

$\therefore\ x=5\sqrt{3}$

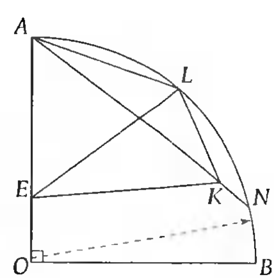
Clave **C**

PROBLEMA N.° 75

En el gráfico, $m\sphericalangle ELK=45°+\dfrac{m\overset{\frown}{NB}}{2}$;

$(AE)(AL)=2(LK)^2$; $\dfrac{2AE+AL}{LK}=4$ y $EK=2(LK)$

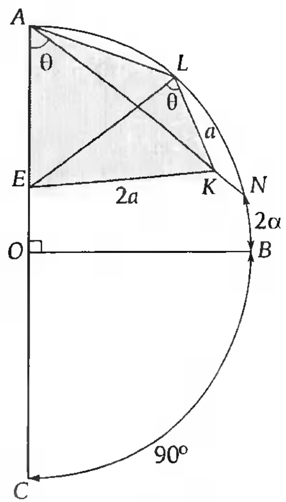
Halle $\dfrac{LE}{KA}$.



A) 2/3 B) 3/2 C) 4/3

D) 3/4 E) 1

Resolución



Sea $m\widehat{NB} = 2\alpha$ y $\theta = \dfrac{m\widehat{NBC}}{2} = 45° + \alpha$

Del dato: $m\measuredangle ELK = 45° + \dfrac{2\alpha}{2} = \theta$

En el cuadrilátero inscriptible $EALK$, usando el teorema de Viette

$$\frac{LE}{KA} = \frac{(LA)(LK)+(AE)(EK)}{(KL)(KE)+(AE)(AL)}$$

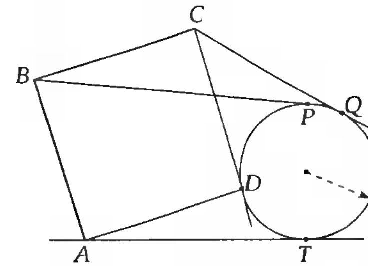
$$\frac{LE}{KA} = \frac{a \cdot AL + 2a \cdot AE}{2a^2 + 2a^2}$$

$$\frac{LE}{KA} = \frac{a(2AE + AL)}{4a^2} = \frac{a(4a)}{4a^2} = 1$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 76

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Siendo T, D, P y Q puntos de tangencia, $CQ=n$ y $AT=\ell$; calcule BP.



A) $2\sqrt{n^2+\ell^2}$

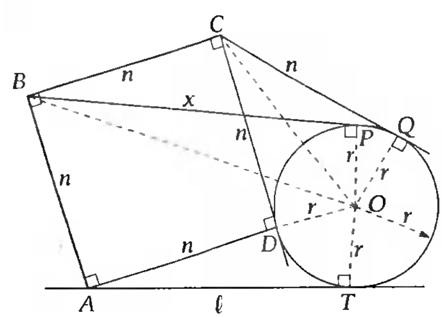
B) $\sqrt{2n^2+\ell^2}$

C) $\sqrt{n\ell}$

D) $\sqrt{n^2+\ell^2}$

E) $2\sqrt{n\ell}$

Resolución



Aplicando el teorema de Marlen en el cuadrado $ABCD$

$$OA^2+OC^2=OB^2+OD^2 \qquad \text{(I)}$$

Siendo

$CD=CQ=n$

$\rightarrow$ $AB=BC=AD=n$

Si $OP=OT=OD=r$; A, D y O son colineales.

En (I)

$$(n+r)^2+(r^2+n^2)=(x^2+r^2)+r^2 \quad \rightarrow \quad 2n^2+2nr=x^2 \qquad \text{(II)}$$

En el $\triangle OAT$

$$(n+r)^2=r^2+\ell^2 \quad \rightarrow \quad n^2+2nr=\ell^2 \qquad \text{(III)}$$

De (III) en (II): $n^2+\ell^2=x^2$

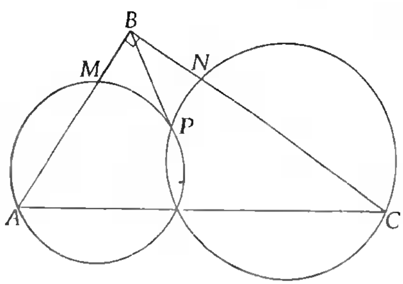
$\therefore \quad x=\sqrt{n^2+\ell^2}$

Clave **D**

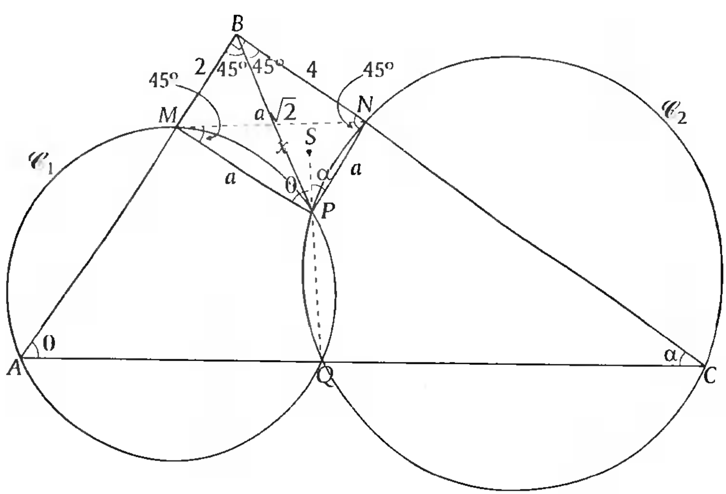
PROBLEMA N.° 77

En el gráfico mostrado, $BN=4$; $BM=2$ y $m\measuredangle PBN=45°$. Halle BP.

A) $3\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{2}$
D) 4
E) $2\sqrt{6}$



Resolución



Tenemos

$Q \in \mathscr{C}_1$ y $Q \in \mathscr{C}_2$

$m\measuredangle SPM = m\measuredangle QAM = \theta$

$m\measuredangle SPN = m\measuredangle QCN = \alpha$

$m\measuredangle MPN = \alpha + \theta$

pero en el $\triangle ABC$

$\alpha + \theta = 90°$

$\square PMBN$: cuadrilátero inscriptible

$m\measuredangle PMN = m\measuredangle PBN = 45°$

Análogamente, $m\measuredangle PNM = 45°$

Si $MP = NP = a$

$\rightarrow \quad MN = a = \sqrt{2}$

Aplicamos el teorema de Ptolomeo en $PMBN$

$$(2)(a) + (4)(a) = x\left(a\sqrt{2}\right)$$

$\therefore \quad x = 3\sqrt{2}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 78

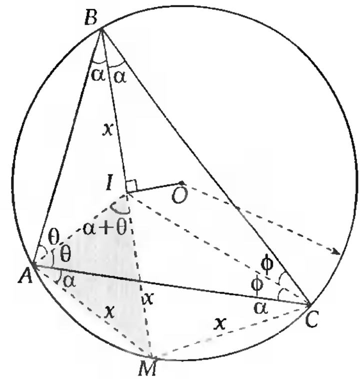
En un triángulo ABC, I y O son el incentro y circuncentro, $(AB)(BC) = 27$ y $m\measuredangle BIO = 90°$. Calcule BI.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

Resolución

Por condición: $(AB)(BC) = 27$ y $m\measuredangle BIO = 90°$.



Si O es circuncentro, entonces al prolongar $\overline{BI}$

$BI = IM = x$

Pero $MA = MC = IM = x$ (por propiedad del incentro)

Aplicamos el teorema de Ptolomeo

$$(2x)(AC) = (AB)(x) + (BC)(x)$$

$$2(AC) = (AB) + (BC) \qquad \text{(I)}$$

Aplicamos el teorema de Viette

$$\frac{(2x)}{(AC)} = \frac{(AB)(BC) + (x)(x)}{(AB)(x) + (BC)(x)}$$

$$\frac{(2x)}{(AC)} = \frac{27 + x^2}{x(AB + BC)} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{2x}{AC} = \frac{27 + x^2}{x(2AC)}$$

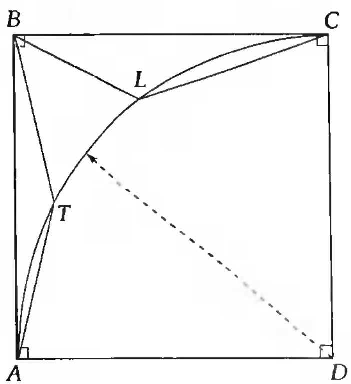
$$4x^2 = 27 + x^2$$

$\therefore \quad x = 3$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 79

En el gráfico, $(AT)^2-(CL)^2=a$; $(TC)^2-(LA)^2=b$. Determine $(BT)^2-(BL)^2$

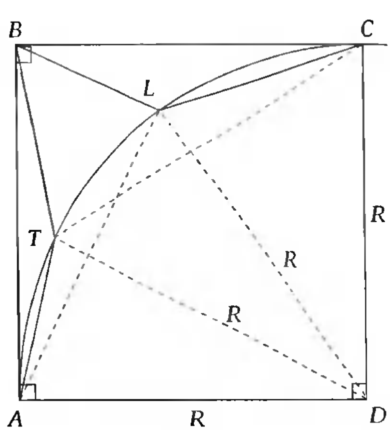


A) $\dfrac{(a+b)}{2}$ B) $\dfrac{(a-b)}{4}$

C) $a+b$

D) $a-b$ E) $\sqrt{ab}$

Resolución



Datos:

$(AT)^2-(CL)^2=a$

$(TC)^2-(LA)^2=b$

$DT=DL=R$

Del teorema de Marlen

$$AT^2+TC^2=BT^2+R^2 \quad \text{(I)}$$

$$CL^2+AL^2=BL^2+R^2 \quad \text{(II)}$$

Restando (I) y (II)

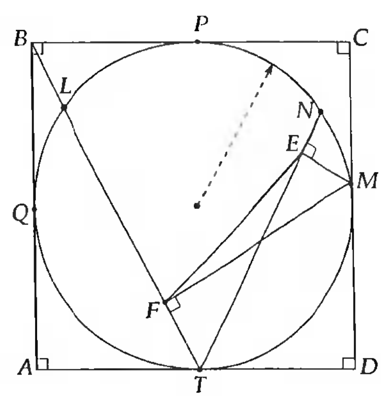
$$\underbrace{(AT^2-CL^2)}_{a}+\underbrace{(TC^2-AL^2)}_{b}=(BT^2-BL^2)$$

$\therefore \; BT^2-BL^2=a+b$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 80

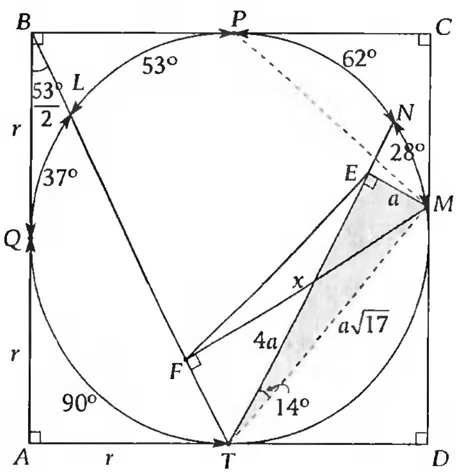
En el gráfico, Q, P, M y T son puntos de tangencia, $m\widehat{LPN}=115°$ y $\sqrt{17}(EF)+FT=7$. Calcule FM.



A) 7/4 B) 7/3 C) 14/3

D) 7/2 E) 7

Resolución



En el $\triangle TBA$:

$$m\sphericalangle TBA=\frac{53°}{2}$$

Como la $m\overset{\frown}{QT}=90°$, entonces

$$\frac{53°}{2}=\frac{90°-m\overset{\frown}{QL}}{2}$$

$$m\overset{\frown}{QL}=37°$$

Como la $m\overset{\frown}{QP}=90°$, entonces

$$m\overset{\frown}{LP}=53°$$

Del dato:

$m\overset{\frown}{LPN}=115°$, entonces la $m\overset{\frown}{PN}=62°$.

Pero también la

$m\overset{\frown}{PNM}=90°$, entonces $m\overset{\frown}{NM}=28°$

Luego, $m\sphericalangle MTN=14°$

En el $\triangle MET$: (notable de 14° y 76°)

$ME=a$; $ET=4a$ y $MT=a\sqrt{17}$

En el cuadrilátero inscriptible *TFEM* aplicamos el teorema de Ptolomeo

$$(x)(4a)=(a)(FT)+\left(a\sqrt{17}\right)(EF)$$

Finalmente

$$4x=\underbrace{\sqrt{17}(EF)+FT}$$

Y del dato, $4x=7$

$$\therefore\quad x=\frac{7}{4}$$

Clave **A**

Capítulo

16

Potencia y eje radical

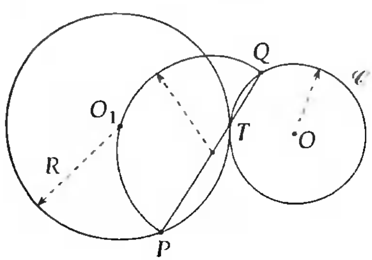
Existen problemas en donde al aplicar el teorema de las cuerdas a dos circunferencias, estas obtienen el mismo valor. Esto nos sugiere analizar si para las dos circunferencias existe un conjunto de puntos en donde al aplicar a ambas un mismo teorema, como el de las cuerdas, el de la tangente o el de secante, estas toman los mismos valores. A estos productos resultantes se les llama potencia, donde el conjunto de puntos forma una recta llamada eje radical.

En este capítulo emplearemos el concepto de potencia de un punto interior o exterior respecto de una circunferencia, así como el lugar geométrico de puntos que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias, denominado eje radical.

Potencia y eje radical

PROBLEMA N.° 1

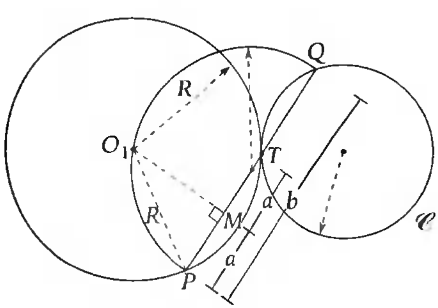
En el gráfico mostrado, T es punto de tangencia. Calcule la potencia de P, respecto de $\mathscr{C}$.



A) R^2 B) $2R^2$ C) $3R^2$
D) $4R^2$ E) $8R^2$

Resolución

Nos piden Pot. $P(\mathscr{C})$.



Pot. $P(\mathscr{C})=(PT)(PQ)$

$\rightarrow$ Pot. $P(\mathscr{C})=(2a)(b)$

En la semicircunferencia, por teorema

$(O_1P)^2=(PM)(PQ) \rightarrow R^2=ab$

$\therefore$ Pot. $P(\mathscr{C})=2R^2$

Clave **B**

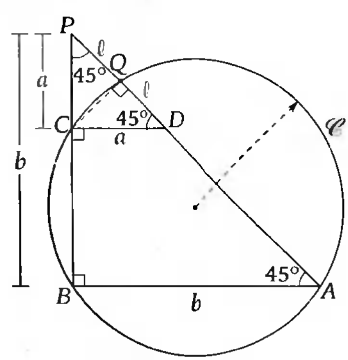
PROBLEMA N.° 2

Dado que $ABCD$ es un trapecio rectángulo (recto en B y C), las prolongaciones de BC y AD se intersecan en P y la circunferencia circunscrita al triángulo ABC interseca a $\overline{PD}$ en Q. Si $PQ=QD$ y $(AB)(CD)=36$, señale la potencia de P, respecto de la circunferencia mencionada.

A) 6 B) 12 C) 18
D) 36 E) 72

Resolución

Nos piden Pot. $P(\mathscr{C})$.



Dato:

- $(AB)(CD)=36 \rightarrow ab=36$
- $PQ=QD$

En $\mathscr{C}$, la $m\sphericalangle AQC=m\sphericalangle ABC=90°$

$$\overline{CQ}\perp\overline{PD}$$

Luego, en el $\triangle PCD$

$$m\sphericalangle CPD=m\sphericalangle CDQ=45°$$

En el $⊿ PCD$: $PC=CD=a$

En el $⊿ PBA$: $PB=BA=b$

$$\text{Pot. } P(\mathscr{C})=(PC)(PB)$$

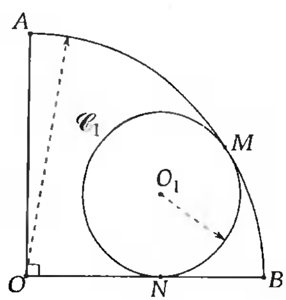
$$\text{Pot. } P(\mathscr{C})=ab$$

$$\therefore\ \text{Pot. } P(\mathscr{C})=36$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

En el gráfico mostrado, M y N son puntos de tangencia y la potencia de A, respecto de $\mathscr{C}_1$, es $2a^2$. Calcule ON.

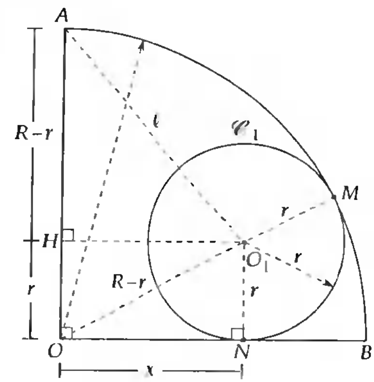


A) $2a$ B) $a\sqrt{2}$ C) a

D) $a\sqrt{3}$ E) $a/2$

Resolución

Piden $ON=x$.



Pot. $A(\mathscr{C}_1)=2a^2$, entonces

$$\ell^2-r^2=2a^2 \qquad \text{(I)}$$

En el $⊿ ONO_1$: $x^2=(R-r)^2-r^2$ (II)

Por el teorema de las proyecciones ortogonales en el $\triangle OAO_1$

$$\ell^2-(R-r)^2=(R-r)^2-r^2$$

$$\ell^2=2(R-r)^2-r^2$$

$$\ell^2-r^2=2[(R-r)^2-r^2] \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (I) y (II) en (III)

$$2a^2=2x^2 \rightarrow a^2=x^2$$

$$\therefore\ x=a$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

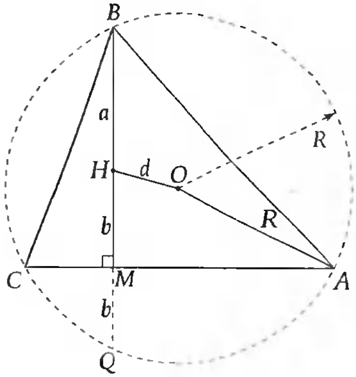
En un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, M es el pie de la altura trazada desde B. Calcule $(OA)^2-(OH)^2$, si $(HB)(HM)=8\ u^2$.

A) $2\ u^2$ B) $4\ u^2$ C) $8\ u^2$

D) $16\ u^2$ E) $32\ u^2$

Resolución

Nos piden $(OA)^2-(OH)^2$.



$$(OA)^2-(OH)^2=R^2-d^2$$

H: ortocentro del $\triangle ABC$, entonces

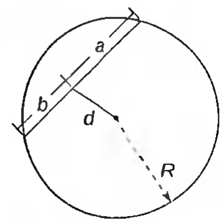
$HM=MQ=b$

Por dato: $(HB)(HM)=8\ u^2$, entonces

$ab=8\ u^2$

Recuerda

Teorema



$R^2-d^2=ab$

Por teorema:

$R^2-d^2=(BH)(HQ)$

$R^2-d^2=2ab=16\ u^2$

$\therefore\ (OA)^2-(OH)^2=16\ u^2$

Clave **D**

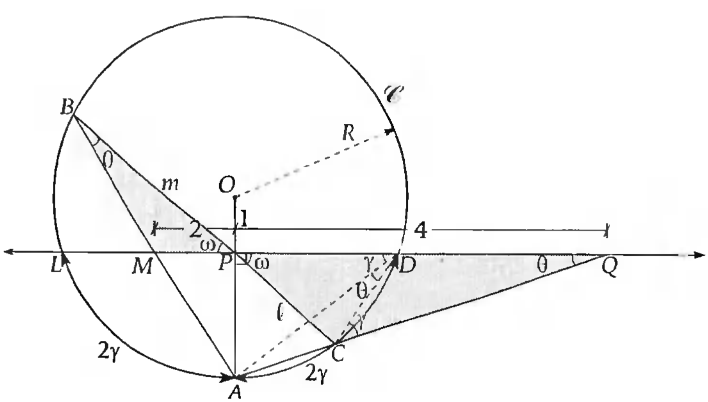
PROBLEMA N.° 5

Sobre el radio OA, de una circunferencia de centro O, se ubica un punto P por el cual se traza una recta perpendicular a $\overline{OA}$ y una cuerda $\overline{BC}$ (P en $\overline{BC}$). Si $\overline{AB}$ y la prolongación de $\overline{AC}$ intersecan a dicha recta perpendicular en M y Q, respectivamente, halle el radio. Considere que $PM=2$, $PQ=4$ y $PO=1$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

Resolución

Nos piden R.



Datos:

$MP=2,\ PQ=4\ \text{y}\ OP=1$

Pot. $P(\mathscr{C})=-R^2-(OP)^2$

Pot. $P(\mathscr{C})=-(R^2-1)$ (I)

Sea $m\widehat{LA}=m\widehat{AD}=2\gamma$, entonces

$m\measuredangle ADL=\gamma$ y

$m\measuredangle DCQ=\gamma$

Además, $m\measuredangle MBP=m\measuredangle ADC=m\measuredangle PQC=\theta$

$\triangle BPM \sim \triangle QPC$

$\dfrac{m}{4}=\dfrac{2}{\ell} \rightarrow m\ell=8$

Pot. $P(\mathscr{C})=-m\ell$

Pot. $P(\mathscr{C})=-8$ (II)

De (I) y (II)

$R^2-1=8$

$\therefore\ R=3$

Clave **B**

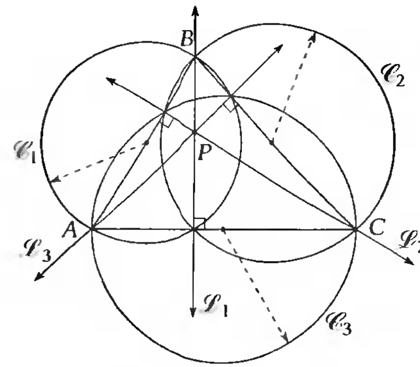
PROBLEMA N.° 6

¿Qué punto notable de un triángulo es el centro radical de las circunferencias cuyos diámetros son los lados de dicho triángulo?

A) incentro B) baricentro
C) ortocentro
D) circuncentro E) excentro

Resolución

Nos piden determinar qué punto notable será el centro radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ para el triángulo ABC.



$\overrightarrow{\mathscr{L}}_1$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
$\overrightarrow{\mathscr{L}}_2$: eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$
$\overrightarrow{\mathscr{L}}_3$: eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$

Como los lados del triángulo son diámetros de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, cada recta contiene a una altura del triángulo y las alturas concurren en P.
P: centro radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

Por lo tanto, el centro radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ será el ortocentro del triángulo ABC.

Clave **C**

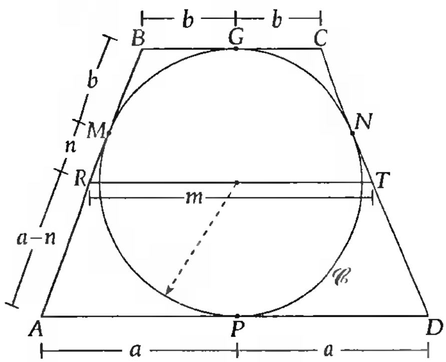
PROBLEMA N.° 7

En un trapecio isósceles $ABCD$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$), M y N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Sea $\overline{RT}$ la base media del trapecio (T en $\overline{CD}$); $RT=m$ y $RM=n$. Indique la suma de potencias de A, B, C y D, respecto a la circunferencia. ($AD > BC$)

A) $2mn$ B) $m\cdot n$
C) $4(m^2+n^2)$
D) $4n^2+m^2$ E) $4m^2+n^2$

Resolución

Piden S: suma de potencias de A, B, C y D respecto a $\mathscr{C}$.



Pot. $A(\mathscr{C})=a^2$

Pot. $C(\mathscr{C})=b^2$

Pot. $B(\mathscr{C})=b^2$

Pot. $D(\mathscr{C})=a^2$

$\rightarrow\ S=2(a^2+b^2)$ (I)

$\overline{RT}$: base media del trapecio $ABCD$

$AR=RB$; $a-n=b+n$, luego

$a-b=2n$ (II)

$$m=\frac{BC+AD}{2};\ m=\frac{2b+2a}{2}$$

$\rightarrow\ a+b=m$ (III)

Por identidad de Legendre

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

Reemplazamos (I), (II) y (III) en la identidad

$$m^2+(2n)^2=S$$

$\therefore\ S=m^2+4n^2$

Clave **D**

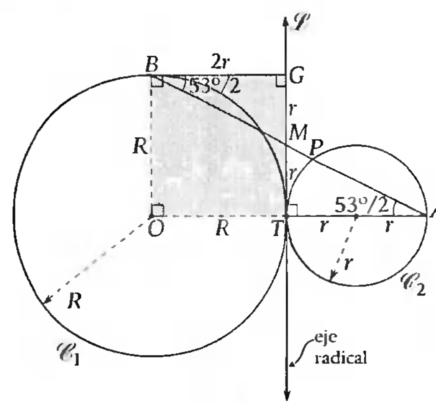
PROBLEMA N.° 8

Sean dos circunferencias tangentes exteriores $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ (tangentes en T); además, A y B equidistan del eje radical de dichas circunferencias ($A\in\mathscr{C}_2$ y $B\in\mathscr{C}_1$). Si $\overline{AB}\cap\mathscr{C}_2=\{P\}$; T es la proyección ortogonal de A sobre el eje radical y $m\widehat{TP}=53°$, indique la razón de radios.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 3/2 E) 1/4

Resolución

Piden $\dfrac{R}{r}$.



Dato:

$$m\widehat{TP}=53\ \rightarrow\ m\measuredangle TAP=\frac{53°}{2}$$

A y B equidistan de $\overleftrightarrow{\mathscr{S}}$, entonces

$BG=AT=2r$

En el ⊾MTA: notable de $\dfrac{53°}{2}$

$AT=2r\ \rightarrow\ MT=r$

De igual modo $GM=r$.

$GB=GT$ y T: punto de tangencia; entonces B será también un punto de tangencia.

Luego, $m\sphericalangle OBG=90°$

$\square OBGT$: cuadrado, entonces

$R=2r$

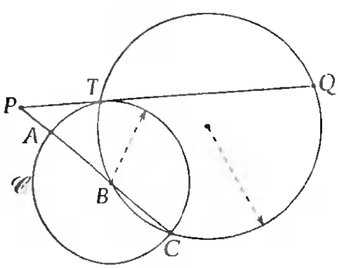
$\therefore\ \dfrac{R}{r}=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

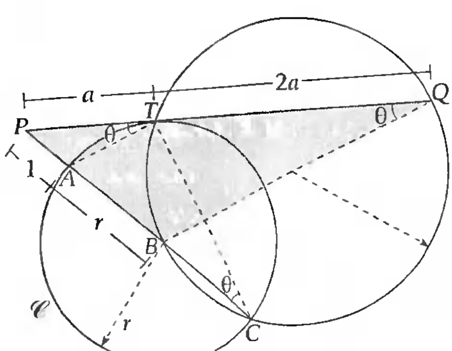
En el gráfico, T es punto de tangencia; la razón de potencias de Q y P, con respecto a $\mathscr{C}$, es 4 y $PA=1$. Señale AB.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 3/2



Resolución

Nos piden $AB=r$.



Dato:

$$\frac{\text{Pot}.\,Q(\mathscr{C})}{\text{Pot}.\,P(\mathscr{C})}=4\ \rightarrow\ \frac{(TQ)^2}{(PT)^2}=4$$

Luego

$TQ=2(TP)=2a$

T: punto de tangencia

$\rightarrow\ m\sphericalangle ATP=m\sphericalangle TCP=\theta$

$m\sphericalangle TQB=m\sphericalangle TCB=\theta$

Notamos $\overline{AT}//\overline{BQ}$, por corolario del teorema de Tales en el $\triangle BPQ$

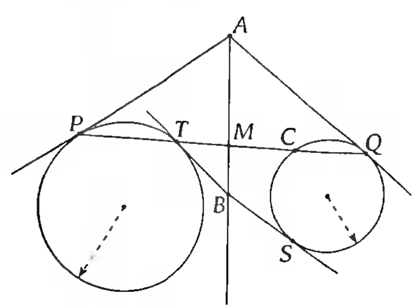
$$\frac{1}{r}=\frac{a}{2a}$$

$\therefore\ r=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 10

Según el gráfico, P, T y S son puntos de tangencia. Si $PT=5$; $TM=4$; $MC=3$; $BT=BS$ y $\overline{AQ}//\overline{TB}$, indique CQ.



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 9

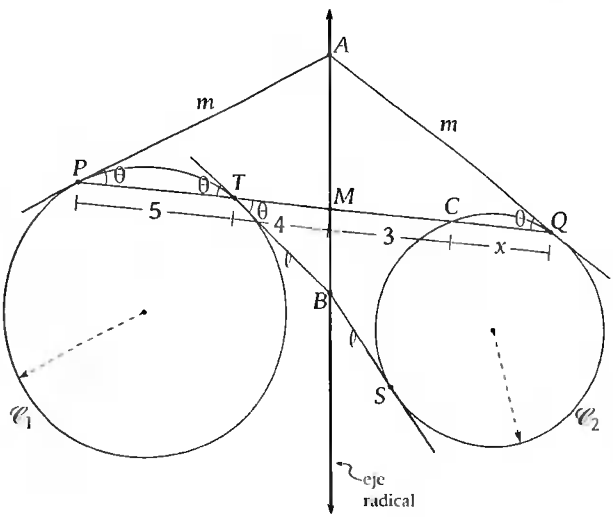
Resolución

Nos piden $CQ=x$.

Por dato: $BT=BS$ $\rightarrow$ Pot. $B(\mathscr{C}_1)$=Pot. $B(\mathscr{C}_2)$ (I)

Del dato: $\overline{AQ}//\overline{TB}$

$m\sphericalangle MTB = m\sphericalangle MQA = \theta$



$\triangle PAQ$: $PA=AQ$

$\rightarrow$ Pot. $A(\mathscr{C}_1)$=Pot. $A(\mathscr{C}_2)$ (II)

De (I) y (II)

A y B determinarán el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, entonces

Pot. $M(\mathscr{C}_1)$=Pot. $M(\mathscr{C}_2)$

$4(4+5)=3(3+x)$

$\rightarrow 36=3(3+x)$

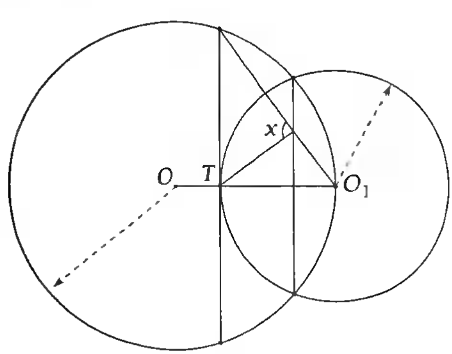
$\therefore$ $x=9$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

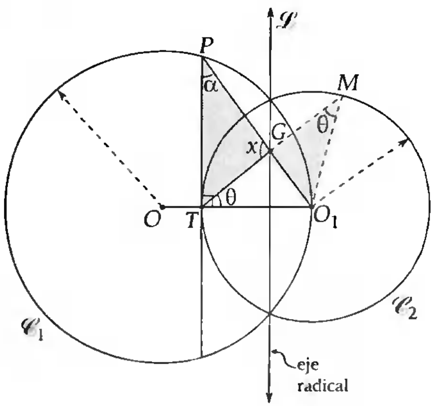
En el gráfico mostrado, T es punto de tangencia. Calcule x.

A) 90°
B) 60°
C) 75°
D) 45°
E) 105°



Resolución

Nos piden x.



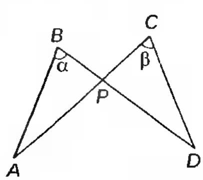
$G \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces

Pot. $G(\mathscr{C}_1)=$Pot. $G(\mathscr{C}_2)$

$(PG)(GO_1)=(TG)(GM)$

Recuerda

Teorema



Si $(AP)(PC)=(BP)(PD)$, entonces

$\alpha=\beta$

Luego, por teorema

$m\sphericalangle TPG=m\sphericalangle GMO_1$

$\rightarrow \quad \alpha=\theta$

$\therefore \; x=90°$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

En un triángulo ABC, de incentro I y excentro E (relativo a $\overline{BC}$), $\mathscr{C}$ es la circunferencia circunscrita y $\dfrac{1}{\text{Pot. } I(\mathscr{C})}+\dfrac{1}{\text{Pot. } E(\mathscr{C})}=\dfrac{1}{K}$.

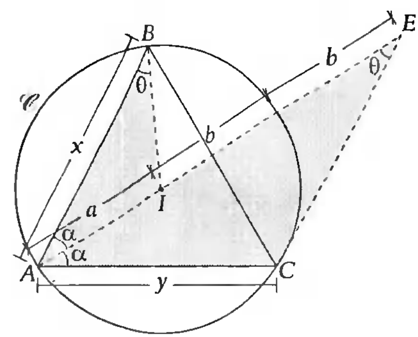
Determine $(AB)(AC)$.

A) $\dfrac{1}{K}$ B) K C) $-K$

D) $-2K$ E) $\dfrac{K}{2}$

Resolución

Nos piden $(AB)(AC)=xy$.



I, E: incentro y excentro del $\triangle ABC$

Dato:

$$\frac{1}{\text{Pot. } I(\mathscr{C})}+\frac{1}{\text{Pot. } E(\mathscr{C})}=\frac{1}{K}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{-ab}+\frac{1}{b(a+2b)}=\frac{1}{K}$$

Luego

$$a(a+2b)=-2K \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico, $\triangle ABI \sim \triangle AEC$

$$\rightarrow \quad \frac{x}{a+2b}=\frac{a}{y}\,;\; xy=a(a+2b) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$xy=-2K$

$\therefore\ (AB)(BC)=-2K$

Clave D

PROBLEMA N.° 13

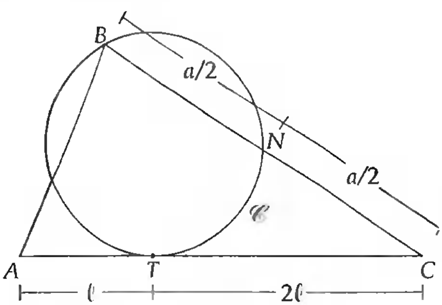
En un triángulo ABC, la circunferencia $\mathscr{C}$ pasa por B y es tangente a AC en T, tal que $CT=2(AT)$; además, $\mathscr{C}$ interseca a $\overline{BC}$ en N $(BN=NC)$. Si $BC=a$, señale Pot. $A(\mathscr{C})$.

A) $\dfrac{a^2}{2}$ B) $\dfrac{a^2}{4}$ C) $\dfrac{a^2}{6}$

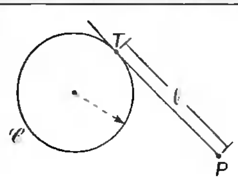
D) $\dfrac{a^2}{3}$ E) $\dfrac{a^2}{8}$

Resolución

Nos piden Pot. $A(\mathscr{C})$



Nota



Pot. $P(\mathscr{C})=\ell^2$

T: punto de tangencia

Pot. $A(\mathscr{C})=(AT)^2=\ell^2$ (I)

Por teorema de la tangente

$$(TC)^2=(CN)(CB)$$

$$4\ell^2=\left(\frac{a}{2}\right)(a)$$

$$\rightarrow\ \ell^2=\frac{a^2}{8} \quad \text{(II)}$$

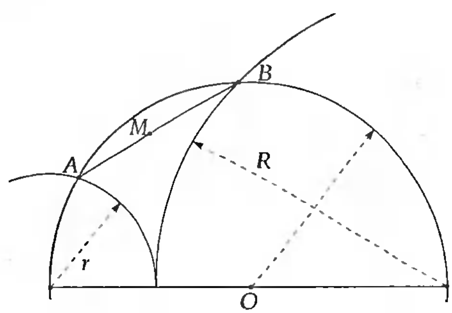
De (I) y (II)

$$\therefore\ \text{Pot}.\,A(\mathscr{C})=\frac{a^2}{8}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, $AM=MB$. Si $R=3$ y $r=2$, calcule la potencia de M respecto de la circunferencia de centro O.



A) $\left(\dfrac{2\sqrt{21}-3}{5}\right)^2$ B) $\left(\dfrac{1-2\sqrt{21}}{5}\right)^2$

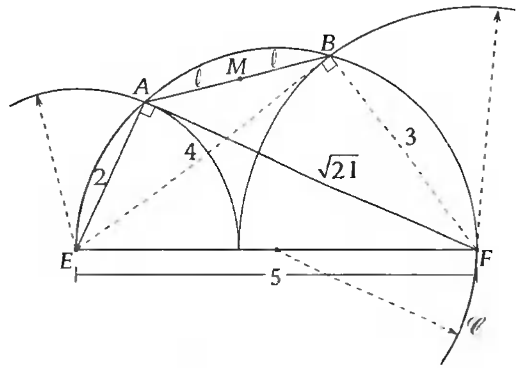
C) $-\left(\dfrac{2\sqrt{21}-3}{5}\right)^2$

D) 1 E) -5

Resolución

Nos piden Pot. $M(\mathscr{C})$

$\rightarrow$ Pot. $M(\mathscr{C})=-(AM)(MB)=-\ell^2$



En el $\triangle EAF$: $(AF)^2+2^2=5^2 \rightarrow AF=\sqrt{21}$

En el $\triangle EBF$: $BF=3$; $EF=5 \rightarrow EB=4$

Por teorema de Ptolomeo en el $\square EABF$

$$(4)(\sqrt{21})=(2)(3)+(5)(2\ell) \rightarrow \ell=\left(\frac{2\sqrt{21}-3}{5}\right)$$

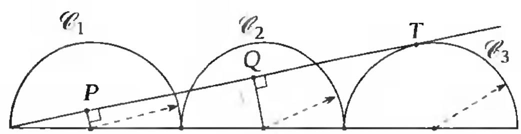
$$\therefore \text{ Pot. } M(\mathscr{C})=-\left(\frac{2\sqrt{21}-3}{5}\right)^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 15

Según el gráfico, las semicircunferencias son congruentes.

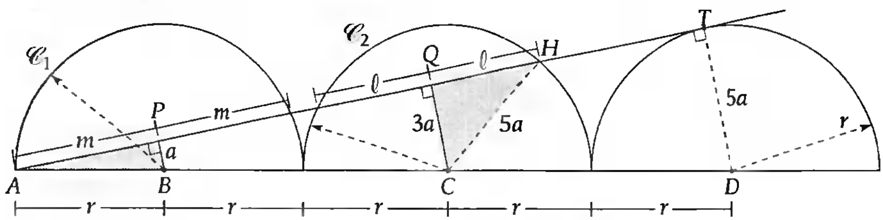
Si T es punto de tangencia, halle $\dfrac{\text{Pot. } P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot. } Q(\mathscr{C}_2)}$.



A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $-\dfrac{3}{2}$ D) $\dfrac{9}{4}$ E) $\dfrac{8}{9}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{\text{Pot}.\,P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot}.\,Q(\mathscr{C}_2)}$



$\text{Pot. } P(\mathscr{C}_1)=-m^2;\ \text{Pot. } Q(\mathscr{C}_2)=-\ell^2 \ \rightarrow\ \dfrac{\text{Pot}.\,P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot}.\,Q(\mathscr{C}_2)}=\left(\dfrac{m}{\ell}\right)^2$

$\triangle APB \sim \triangle AQC$: $\dfrac{PB}{QC}=\dfrac{AB}{AC} \ \rightarrow\ \dfrac{PB}{QC}=\dfrac{\cancel{r}}{3\cancel{r}}=\dfrac{1}{3}$

$\triangle AQC \sim \triangle ATD$: $\dfrac{QC}{TD}=\dfrac{3r}{5r}=\dfrac{3}{5}$; $QC=3a \ \rightarrow\ TD=r=5a$

En el $\triangle APB$: $m^2=r^2-a^2=(5a)^2-a^2 \ \rightarrow\ m=2a\sqrt{6}$ (I)

En el $\triangle CQH$: $\ell^2=(5a)^2-(3a)^2 \ \rightarrow\ \ell=4a$ (II)

De (I) y (II): $\dfrac{m}{\ell}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{4a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

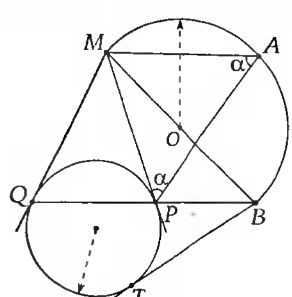
$\therefore\ \dfrac{\text{Pot}.\,P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot}.\,Q(\mathscr{C}_2)}=\dfrac{3}{2}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

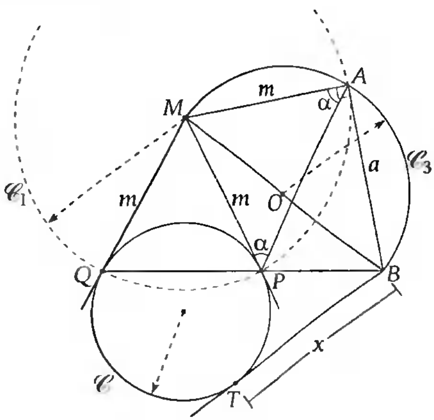
En el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia. Si $AB=a$, calcule BT.

A) a
B) $2a$
C) $3a$
D) $3/4a$
E) $a\sqrt{2}$



Resolución

Nos piden $BT=x$.



Por teorema de la tangente: $(BT)^2=(BP)(BQ)$

$\rightarrow\ x^2=(BP)(BQ)$ (I)

MB: diámetro $\rightarrow$ m$\measuredangle MAB=90°$, entonces

A es punto de tangencia en $\mathscr{C}_1$

$\overleftrightarrow{QB}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}$

Pot. $B(\mathscr{C}_1)=$Pot. $B(\mathscr{C})$

$a^2=x^2$

$\therefore\ x=a$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

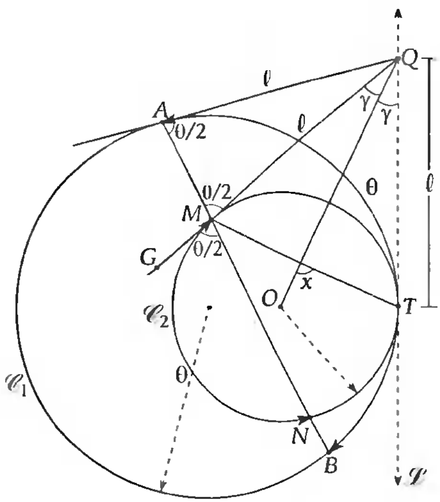
Se tienen dos circunferencias tangentes interiores (tangentes en T). En la circunferencia mayor se traza una cuerda AB secante a la circunferencia menor en M y N ($M\in\overline{AN}$), tal que m$\overset{\frown}{ATB}=$ m$\overset{\frown}{MN}$. Si las tangentes trazadas por A y M a las circunferencias se intersecan en Q, halle la medida del ángulo determinado por $\overline{TM}$ y $\overline{OQ}$.

Considere a O como el centro de la circunferencia menor.

A) 60° B) 90° C) 80°
D) 100° E) 120°

Resolución

Nos piden x.



Del dato:

Sea m$\overset{\frown}{MN}=$ m$\overset{\frown}{ATB}=\theta$

m$\measuredangle QAB=$ m$\measuredangle AMQ=\dfrac{\theta}{2}\ \rightarrow\ QA=QM$

Pot. $Q(\mathscr{C}_1)=$Pot. $Q(\mathscr{C}_2)$; $Q\in\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$;

$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ es el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Luego

$QT=QM=QA=\ell$

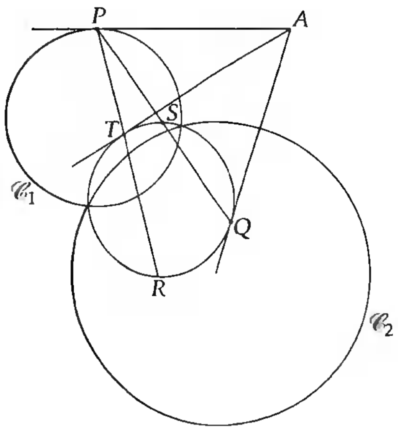
T y M: puntos de tangencia

$\therefore\ x=90°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

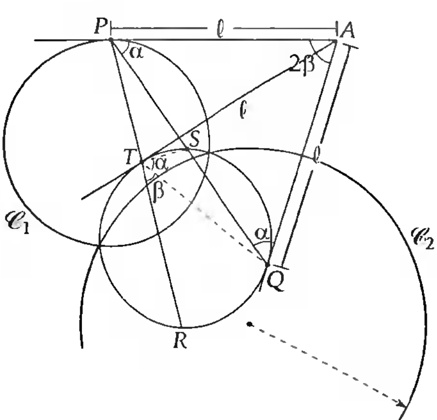
Si T, P y Q son puntos de tangencia y A pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, calcule $m\overset{\frown}{RQS}$.



A) 120° B) 240°
C) 150°
D) 180° E) 135°

Resolución

Nos piden $m\overset{\frown}{RQS}$.



Por dato, A pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Entonces

$$AP=AT=AQ=\ell$$

$$m\sphericalangle APQ=m\sphericalangle AQP=\alpha$$

En el $\triangle PAQ$: $2(\alpha+\beta)=180°$

$$\alpha+\beta=90° \qquad \text{(I)}$$

A: circuncentro del $\triangle TPQ$, entonces

$$m\sphericalangle QTR=\frac{m\sphericalangle PAQ}{2}=\beta$$

Q: punto de tangencia, luego

$$m\sphericalangle STQ=m\sphericalangle SQA=\alpha$$

$$m\sphericalangle STR=\alpha+\beta \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$m\sphericalangle STR=90°=\frac{m\overset{\frown}{RQS}}{2}$$

$\therefore\ m\overset{\frown}{RQS}=180°$

Clave **D**

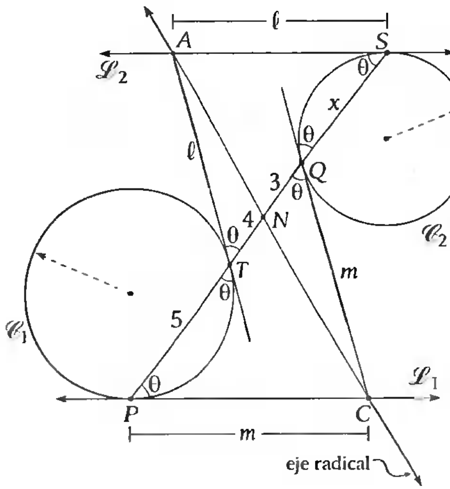
PROBLEMA N.° 19

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias exteriores y $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas paralelas tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en P y S, respectivamente. $\overline{PS}$ interseca a $\mathscr{C}_1$ en T y a $\mathscr{C}_2$ en Q; la recta tangente a $\mathscr{C}_1$, trazada por T, interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en A y una recta tangente a $\mathscr{C}_2$, trazada por Q, interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ en C. Si $\overline{AC}\cap\overline{TQ}=\{N\}$, $PT=5$, $TN=4$ y $NQ=3$, calcule QS.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 9 E) 6

Resolución

Nos piden $QS=x$.



Del dato:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

P, T, Q y S, de acuerdo al dato, son puntos de tangencia.

Luego

$AS=AT$ y $CP=CQ$

$\overline{AC}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Pot. $N(\mathscr{C}_1)=$Pot. $N(\mathscr{C}_2)$

$4(4+5)=3(3+x)$

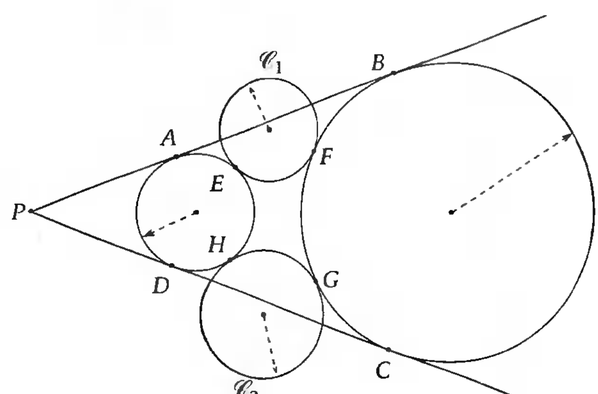
$\therefore\ x=9$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

En el gráfico, A; B; C; D; E; F; G y H son puntos de tangencia.

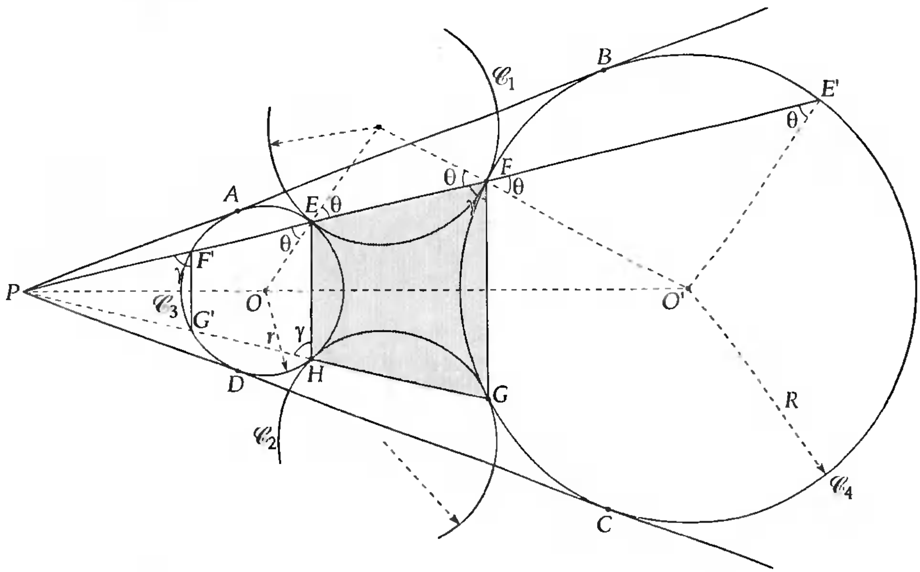
Si Pot. $P(\mathscr{C}_1)=K$, señale Pot. $P(\mathscr{C}_2)$.



A) K B) $2K$ C) $-K$ D) $K\sqrt{2}$ E) $-2K$

Resolución

Nos piden Pot. $P(\mathscr{C}_2)$.



Según dato Pot. $P(\mathscr{C}_1)=K$

A, B, C y D: puntos de tangencia

$$\mathscr{C}_4=\text{Hom. }\mathscr{C}_3\left(P;\frac{R}{r}\right)$$

$$\overline{OE}//\overline{O'E'} \text{ y } \frac{O'E'}{OE}=\frac{R}{r} \rightarrow E'=\text{hom. }E\left(P;\frac{R}{r}\right)$$

Luego, P, E, F y E' serán colineales, análogamente P, H y G serán colineales.

$$\overline{FG}=\text{Hom. }\overline{F'G'}\left(P;\frac{R}{r}\right) \rightarrow \overline{FG}//\overline{F'G'}$$

$$m\sphericalangle PF'G'=m\sphericalangle PFG=\gamma$$

El $\square EFGH$ será inscriptible.

$$(PH)(PG)=(PE)(PF) \rightarrow \text{Pot. }P(\mathscr{C}_2)=\text{Pot. }P(\mathscr{C}_1)$$

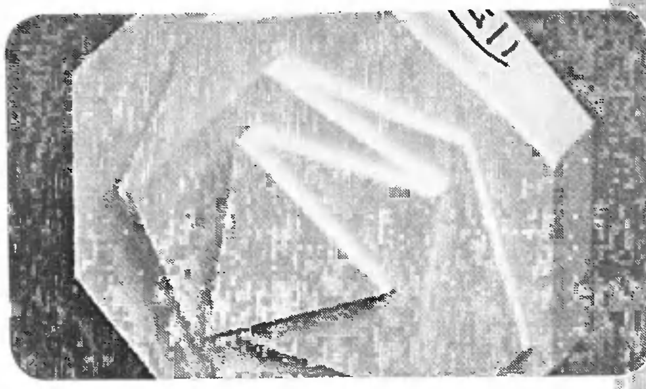
$\therefore$ Pot. $P(\mathscr{C}_2)=K$

Clave **A**

Capítulo

17

Polígonos regulares



Las estructuras metálicas de puentes, brazos de grúas, o monumentos como la torre Eiffel, requieren una distribución homogenea o regular para alcanzar una mayor rigidez o estabilidad. Por ello se recomienda el uso de las vigas que forman polígonos regulares.

También la naturaleza nos muestra a diario objetos que toman la figura de polígonos regulares, pero este hecho obedece a condiciones particulares que tienen una explicación científica (panal de abejas, celdas iónicas, etc.).

Los problemas resueltos abordan las propiedades y teoremas del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono, octógono, decágono, dodecágono regular, así como la relación entre radio y apotema de los polígonos regulares de n lados y $2n$ lados.

Capítulo 17

Polígonos regulares

PROBLEMA N.° 1

En un cuadrado $ABCD$, inscrito en una circunferencia, se traza $\overline{PQ}$ paralelo a $\overline{BC}$ (P y Q en la circunferencia), que interseca a $\overline{BD}$ en F. Si $PF=a$ y $FQ=b$, calcule el circunradio del cuadrado.

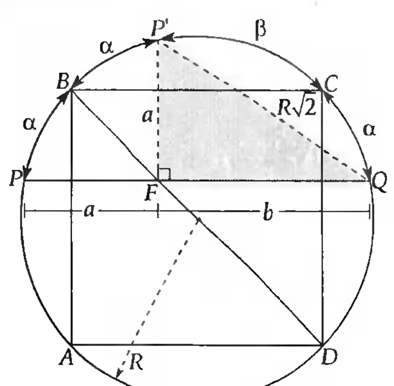
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

C) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{6}}$

D) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ E) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

Resolución

Nos piden R.



Se traza $\overline{FP'} \perp PQ$

$$m\widehat{BP'} = m\widehat{BP} = \alpha$$

Del dato: $\overline{BC} // \overline{PQ}$

$$m\widehat{CQ} = m\widehat{PB} = \alpha$$

$$FP=FP'=a \;\; \text{y} \;\; m\widehat{P'Q}=90^\circ$$

Luego

$$P'Q = \ell_4 = R\sqrt{2}$$

Del $\triangle P'FQ$

$$\left(R\sqrt{2}\right)^2 = a^2+b^2$$

$$\therefore \;\; R=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Clave **D**

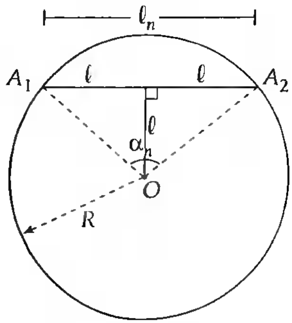
PROBLEMA N.° 2

En un polígono regular de n lados, cuyo apotema y lado miden ℓ y 2ℓ, respectivamente, se traza otro polígono regular de $n+2$ lados, cuyo lado mide 6. Calcule la mayor distancia de un vértice a la recta que contiene a dos vértices que determinan un arco de medida 120°.

A) 6 B) 8 C) 7

D) 5 E) 9

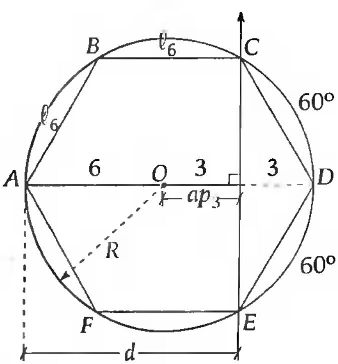
Resolución



$$m\measuredangle A_1OA_2=\alpha_n=\frac{360^\circ}{n}=90^\circ$$

$\rightarrow\ n=4$

Entonces, el polígono regular de $n+2$ lados es un hexágono regular ($n+2=6$), donde $\ell_6=6=R$



Como la $m\widehat{CDE}=120^\circ$

$CE=\ell_3$ y la distancia de O a $\overline{CE}$ es el ap_3

$\ell_3=R\sqrt{3}$ y $ap_3=\dfrac{R}{2}$

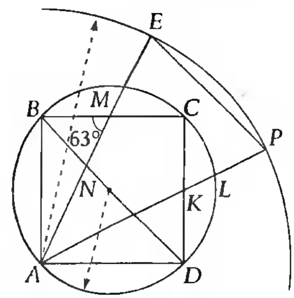
$\rightarrow\ ap_3=3$

$\therefore\ d=R+ap_3=6+3=9$

Clave **E**

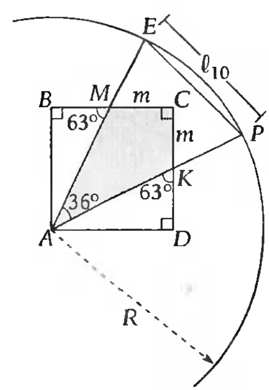
PROBLEMA N.° 3

En el gráfico, $CM=CK$ y $ABCD$ es un cuadrado. Si $\overline{PK}$ es la sección áurea de $\overline{PA}$ y $PK=1$, señale PE.



A) 2 B) 1,5 C) 1
D) 5 E) 9

Resolución



$CM=CK=m$

$$PK=PA\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1$$

(PK: sección áurea de $\overline{PA}$)

$$PA=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ \rightarrow\ R=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

En el cuadrado $ABCD$ ($CM=CK$)

$\rightarrow\ m\measuredangle AKD=m\measuredangle AMB=63^\circ$

En $\diamond AMCK$: $m\measuredangle MAK+90^\circ=63^\circ+63^\circ$

$\rightarrow \quad m\measuredangle MAK=36^\circ$

Luego $EP=\ell_{10}=R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

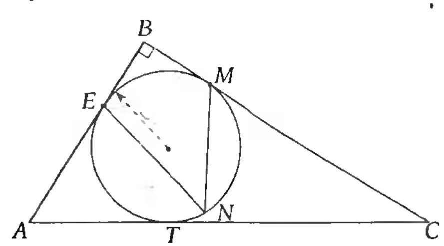
Como $R=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore \quad EP=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

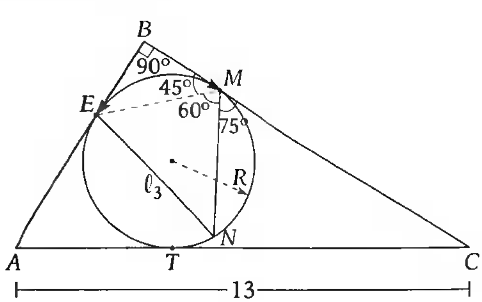
En el gráfico, $AB=5$, $AC=13$ y $m\measuredangle NMC=75^\circ$. Indique EN.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

Resolución

Si $AB=5$; $AC=13$, luego



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$

$5^2+BC^2=13^2 \rightarrow BC=12$

Aplicamos el teorema de V. Poncelet

$5+12=13+2R$

$\rightarrow \quad R=2$

$m\widehat{EM}=90^\circ$

$\rightarrow \quad m\measuredangle EMB=45^\circ$

Si la $m\measuredangle NMC=75^\circ$, luego la $m\measuredangle EMN=60^\circ$ y la

$m\widehat{EN}=120^\circ \quad \rightarrow \quad EN=\ell_3=R\sqrt{3}$

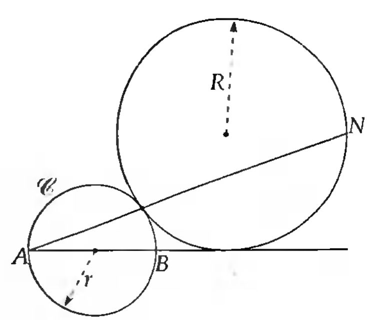
Como $R=2$

$\therefore \quad EN=2\sqrt{3}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

Según el gráfico, $R=3\sqrt{10}$ y $r=2\sqrt{10}$. Calcule la potencia de N, respecto de la circunferencia $\mathscr{C}$.



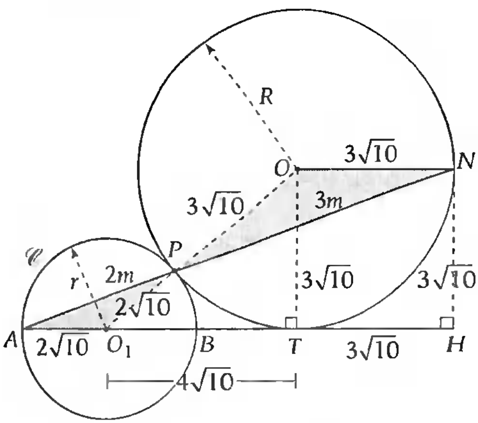
A) 480 B) 540 C) 580
D) 520 E) 460

Resolución

Del dato:

$R=3\sqrt{10}$

$r=2\sqrt{10}$



O_1, P, O son colineales, entonces

$O_1O=5\sqrt{10}$ y $OT=3\sqrt{10}$

En el ⊾O_1OT

$$O_1T=\sqrt{O_1O^2-OT^2}=4\sqrt{10}$$

También el $\triangle AO_1P\sim\triangle NOP$

$$\frac{AP}{PN}=\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}=\frac{2}{5}$$

Entonces, $AP=2m$; $NP=3m$

Nos piden

Pot. $N(\mathscr{C})=NA\times NP=5m\times 3m=15m^2$,

y se requiere conocer m^2.

En el ⊾ANH

$$AN^2=AH^2+HN^2$$

$$(5m)^2=(9\sqrt{10})^2+(3\sqrt{10})^2$$

$$25m^2=900$$

$$m^2=36$$

Finalmente

Pot. $N(\mathscr{C})=15(36)=540$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

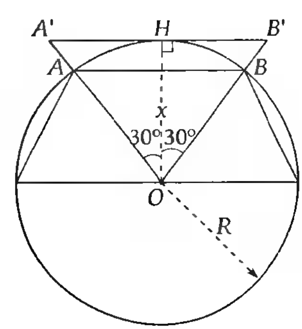
Si la diferencia de las longitudes de los lados de dos hexágonos regulares circunscrito e inscrito en una misma circunferencia es $(2-\sqrt{3})$, calcule el apotema del polígono regular de mayor longitud.

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Resolución

Nos piden $OX=x$.



$AB=\ell_6=R$

$OH=x=ap_6(A'B'...)=R$

$$A'H=HB'=\frac{x}{\sqrt{3}}= \;\rightarrow\; A'B'=\frac{2}{3}x\sqrt{3}$$

Del dato: $(A'B')-(AB)=2-\sqrt{3}$

Reemplazamos valores

$$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{3}-x\right)=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

Clave **C**

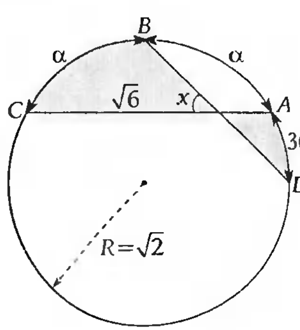
PROBLEMA N.° 7

En una circunferencia, de radio $\sqrt{2}$, se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $AC=\sqrt{6}$, $BD=2$ y $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° D) 120°

Resolución

Nos piden x.



$$BD=2=R\sqrt{2}=\ell_4 \quad \rightarrow \quad m\widehat{BD}=90°$$

$$AC=\sqrt{6}=R\sqrt{3}=\ell_3 \quad \rightarrow \quad m\widehat{AC}=120°$$

$2\alpha=120° \ \rightarrow\ \alpha=60°$

Como

$$m\widehat{BD}=90° \ \rightarrow\ m\widehat{AD}=30°$$

Luego

$$x=\frac{\alpha+30°}{2}=\frac{90°}{2}$$

$\therefore\ x=45°$

Clave **B**

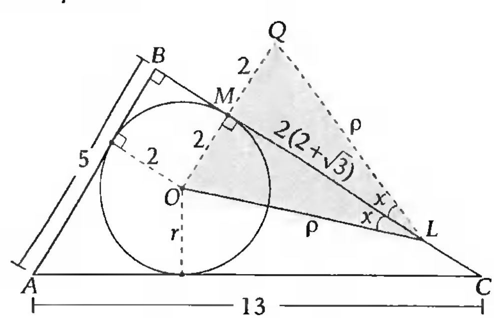
PROBLEMA N.° 8

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se tiene una circunferencia inscrita de centro O, donde M es el punto de tangencia con $\overline{BC}$; $AB=5$ y $AC=13$. Luego, se ubica L en $\overline{MC}$, tal que la potencia de L con respecto de la circunferencia inscrita es $4(7+4\sqrt{3})$. Señale $m\sphericalangle MLO$.

A) 15° B) 27° C) 30°
D) 18° E) 36°

Resolución

Nos piden x.



$$\text{Pot.}\,L(\mathscr{C})=4(7+4\sqrt{3})=4(2+\sqrt{3})^2=LM^2$$

$$LM=2(2+\sqrt{3})$$

En el ⊿ABC: $AB=5$, $AC=13$ $\rightarrow$ $BC=12$

Aplicando el teorema de Poncelet

$$5+12=13+2r \rightarrow r=2=OM$$

Prolongamos $\overline{OM}$ hasta Q, de modo que

$$MQ=2 \text{ y } LQ=LO=\rho$$

En el ⊾OQL

$$\frac{OQ}{ML}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{\ell_{12}}{a_{p_{12}}}$$

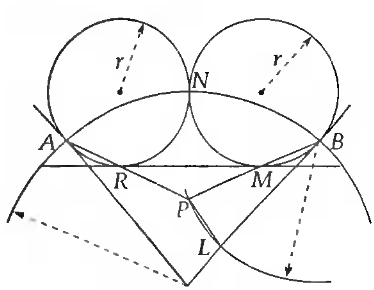
$$\rightarrow 2x=\frac{360°}{12}$$

$\therefore$ $x=15°$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 9

Según el gráfico, $m\widehat{AB}=60°$ y $r=6$. Indique PL. (A, B, M y R son puntos de tangencia)



A) $2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

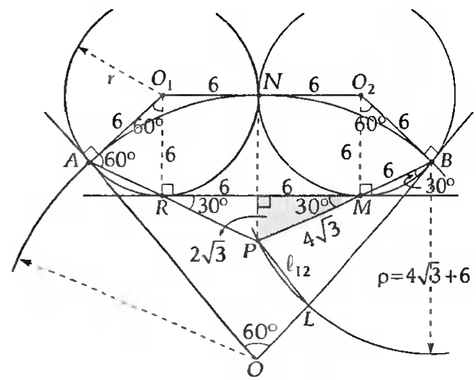
B) $2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

C) $2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

D) $2\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

E) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Resolución



Si la $m\widehat{AB}=60°$, entonces

$$m\sphericalangle AOB=60°$$

$$O_1N=NO_2=r=6$$

En OAO_1O_2B: $m\sphericalangle AO_1O_2=m\sphericalangle BO_2O_1=150°$

$$m\sphericalangle NO_2M=90° \text{ y } m\sphericalangle MO_2B=60°$$

El $\triangle MO_2B$: equilátero, luego

$$m\sphericalangle MBL=30°$$

En el $\triangle RPM$: $RM=12$

$$\rightarrow \quad PM=4\sqrt{3}$$

$$BP=\rho=BM+4\sqrt{3}$$

Pero $BM=6$, entonces

$$BP=6+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$$

En el $\triangle BPL$: $PL=\ell_{12}=\rho\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$PL=2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $PL=2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

En el gráfico, $AB=2r=8$ y $m\sphericalangle OO_1P=9°$.
Halle AN.

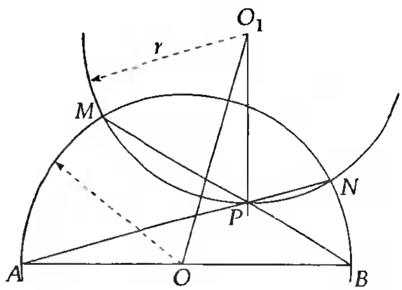
A) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

B) $2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

C) $4\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

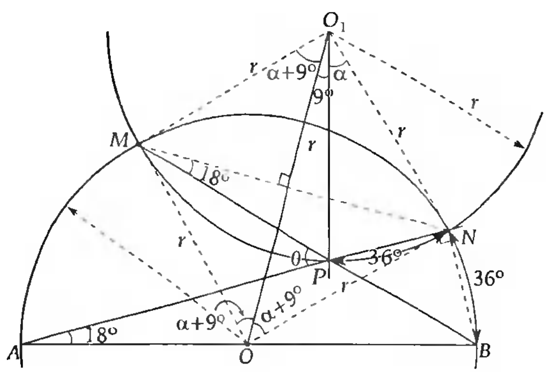
D) $4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

E) $2(\sqrt{5}+1)$



Resolución

Piden $AN=x$.



$AB=2r=8$

$\rightarrow$ $r=4$

Sea la $m\sphericalangle PO_1N=\alpha$, luego

$$m\sphericalangle MO_1O=m\sphericalangle OO_1N=9°+\alpha$$

Como $O_1M=O_1P=O_1N$, entonces

$$\theta=\frac{m\sphericalangle MO_1N}{2}=9°+\alpha$$

También

$$m\sphericalangle MON=m\sphericalangle MO_1N=2\alpha+18°=m\widehat{MN}$$

$$\theta=\frac{m\widehat{AM}+m\widehat{NB}}{2}=9°+\alpha$$

Pero $m\widehat{AMB}=180°$

$$2(2\alpha+18°)=180°$$

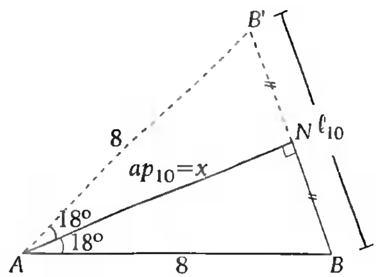
Luego, $\alpha=36^\circ$

$m\widehat{PN}=36^\circ$ y

$m\measuredangle NMP=18^\circ$

Luego

$m\widehat{NB}=36^\circ$ y $m\measuredangle NAB=18^\circ$



$$ap_{(10)}=\frac{8}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ x=2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $AD=BC=a$, $m\measuredangle BCA=54^\circ$ y $m\measuredangle ABD=63^\circ$. Calcule AC.

A) $a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

B) $\frac{a}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

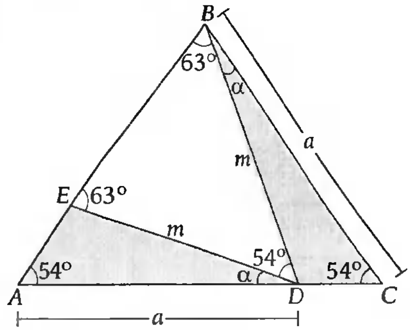
C) $\frac{a}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

D) $a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

E) $2a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Resolución

Nos piden $AC=x$.



Trazamos $\overline{DE}$ de modo que $DE=DB=m$, entonces

$m\measuredangle DEB=63^\circ$ y $m\measuredangle EDB=54^\circ$

En el $\triangle DBC$

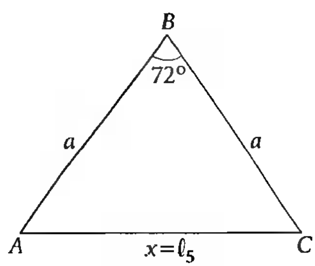
$m\measuredangle BDA=54^\circ+\alpha \ \rightarrow\ m\measuredangle ADE=\alpha$

Luego, el $\triangle ADE\cong\triangle CBD$ (L.A.L.)

$\rightarrow\ m\measuredangle DAE=m\measuredangle BCD=54^\circ$

Luego, en el $\triangle ABC$

$m\measuredangle ABC=72^\circ$ y $AB=BC=a$



$\triangle ABC$ es el triángulo elemental de un pentágono regular.

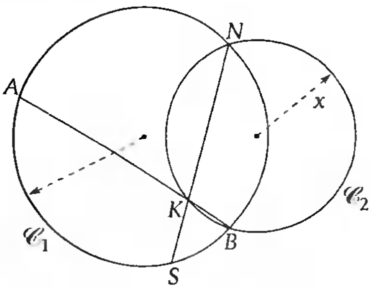
$$\ell_5=\frac{a}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ x=\frac{a}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

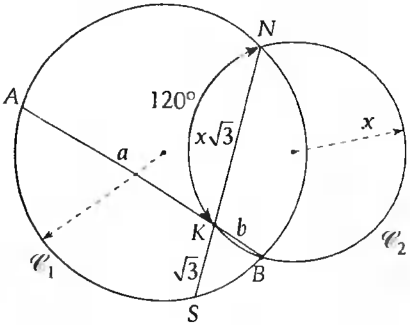
En el gráfico, $3[\text{Pot. } K(\mathscr{C}_1)]=-\text{Pot. } A(\mathscr{C}_2)=-36$
$m\widehat{KN}=120°$ y $KS=\sqrt{3}$. Calcule x.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Nos piden x.



$m\widehat{KN}=120° \rightarrow KN=\ell_3=x\sqrt{3}$

$3\left[\text{Pot. } K(\mathscr{C}_1)\right]=-\text{Pot. } A(\mathscr{C}_2)$

$\rightarrow 3[-ab]=-a(a+b)$

$3b=a+b \rightarrow 2b=a$

Del dato: $\text{Pot. } K(\mathscr{C}_1)=-12$

$\rightarrow -(2b)(b)=-12$

$b=\sqrt{6}$ y $a=2\sqrt{6}$

$\text{Pot. } K(\mathscr{C}_1)=-a\cdot b$

$-\left(\sqrt{3}\right)\left(x\sqrt{3}\right)=-\left(2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}\right)$

$3x=12$

$\therefore x=4$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

En un hexágono regular $ABCDEF$ se ubica en la región exterior, y relativa a $\overline{EF}$, el punto P, tal que $m\measuredangle APD=90°$, $PD=a$ y $AP=b$. Calcule BP.

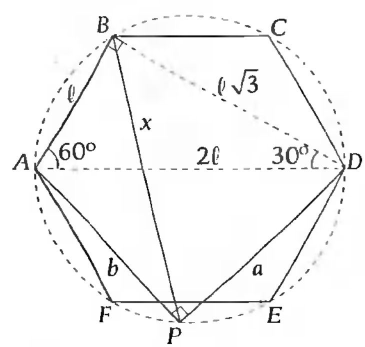
A) $\dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}b+\sqrt{2}a}{3}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}b+a}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}a+b}{3}$ E) $\dfrac{a+b}{2}$

Resolución

Nos piden $BP=x$.



$m\measuredangle BAD=60°$, $m\measuredangle ADB=30°$, entonces

$m\measuredangle ABD=90°$

También si $AB=\ell$, luego

$BD=\ell\sqrt{3}$ y $AD=2\ell$

Como el cuadrilátero $ABDP$ es inscriptible aplicamos el teorema de Ptolomeo:

$$(x)(2\ell)=(a)(\ell)+(b)(\ell\sqrt{3})$$

Luego

$$x=\frac{b\sqrt{3}+a}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

Se tienen un octágono regular $ABCDEFGH$ y el triángulo equilátero BDK, tal que K se encuentra en la región interior. Señale $\dfrac{HK}{FG}$.

A) $\sqrt{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

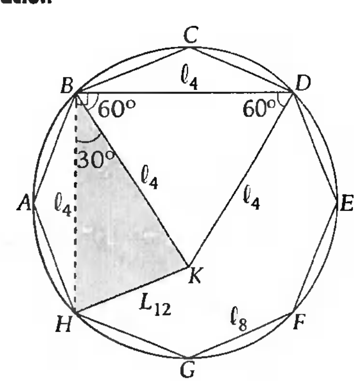
B) $\sqrt{4-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

C) $\sqrt{4-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

D) $\sqrt{4+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

E) $\sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

Resolución



En el octágono regular se cumple que $HBDF$ es un cuadrado

$\rightarrow$ $HB=BD=14$, $m\sphericalangle HBD=90°$

Luego, $m\sphericalangle HBK=30°$

$$\frac{HK}{FG}=\frac{L_{12}}{\ell_8}$$

$$\ell_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \ell_4=R\sqrt{2}$$

$$L_{12}=\ell_4\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$L_{12}=R\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Reemplazando tenemos

$$\frac{HK}{FG}=\frac{R\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\frac{HK}{FG}=\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

$$\frac{HK}{FG}=\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})}$$

$$\frac{HK}{FG}=\sqrt{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 15

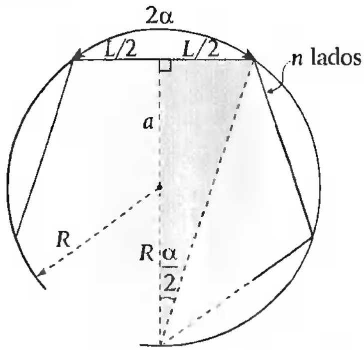
El circunradio y el apotema de un polígono regular miden R y a. Calcule la longitud del apotema de otro polígono regular del doble número de lados que el primero, si a su vez los perímetros de las regiones que limitan son iguales.

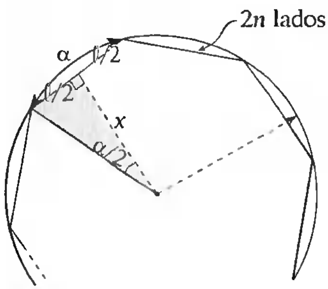
A) $R+a$ B) $\dfrac{R+a}{3}$ C) $\dfrac{R+a}{2}$

D) $R+2a$ E) $\dfrac{2R+a}{2}$

Resolución

Nos piden x.





Cuando el número de lados se duplica, la medida del arco correspondiente a cada lado se reduce a la mitad.

Por semejanza de triángulos rectángulos

$$\frac{x}{\left(\frac{\ell}{2}\right)}=\frac{a+R}{\left(\frac{L}{2}\right)} \rightarrow x=\left(\frac{\ell}{L}\right)(a+R)$$

Por dato, los perímetros son iguales

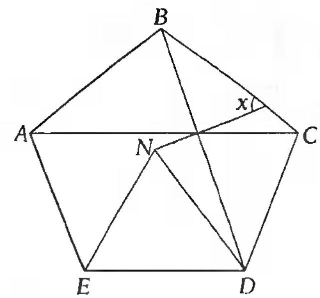
$$nL=(2n)\ell \rightarrow \left(\frac{\ell}{L}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a+R}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

El circunradio del pentágono regular $ABCDE$ mide R. Si $EN=ND=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, halle x.



A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 72°

Resolución

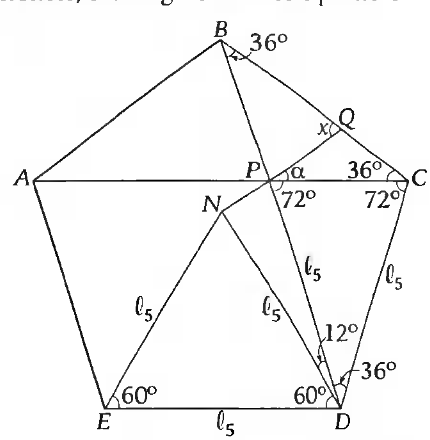
Sabemos que

$$\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

y del dato

$$EN=ND=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Entonces, el triángulo END es equilátero.



Como $BC=CD$ y $m\sphericalangle BCD=108°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle CBD=m\sphericalangle CDB=36°$

También, $m\sphericalangle BCA=36°$

Como $m\sphericalangle CPD=m\sphericalangle PCD=72°$

$DP=DC=\ell_5$ $\rightarrow$ $DN=DP=DC=\ell_5$

$$\rightarrow \quad \alpha=\frac{m\sphericalangle CDN}{2}=\frac{36°+12°}{2}=24°$$

Luego, en el $\triangle PCQ$

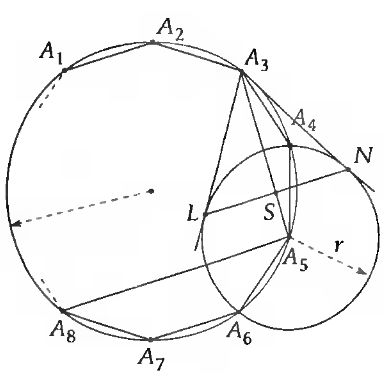
$x=24°+36°$

$\therefore$ $x=60°$

Clave C

PROBLEMA N.° 17

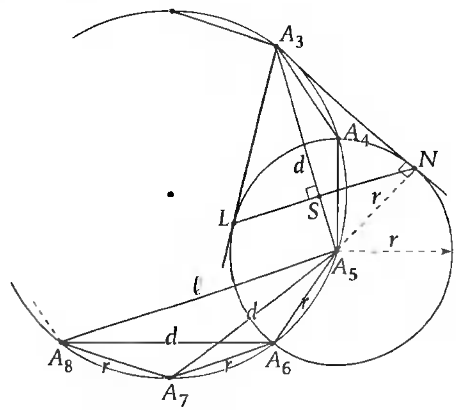
En el gráfico, $A_1A_2A_3A_4A_5...A_n$ son los vértices de un polígono regular de n lados y $\frac{A_3S}{SA_5}=a$. Determine $\frac{A_5A_8}{r}$. (L y N son puntos de tangencia)



A) $a/2$ B) $2a$ C) $2a/3$

D) a E) $a/4$

Resolución



$A_3A_5=A_5A_7=A_6A_8=d$

$$\frac{A_3S}{SA_5}=a$$

Pero $A_3S+SA_5=A_3A_5$

Luego, $A_5S(a+1)=d$

En el $⊿A_3NA_5$

$r^2=A_3A_5\cdot A_5S$

$$r^2=d\cdot\frac{d}{a+1} \quad \rightarrow \quad r^2=\frac{d^2}{a+1}$$

En el cuadrilátero inscrito $A_5A_6A_7A_8$: (teorema de Ptolomeo):

$$d^2=r\cdot\ell+r\cdot r=r\cdot\ell+\frac{d^2}{a+1} \qquad \text{(I)}$$

Dividimos la expresión (I) entre r^2

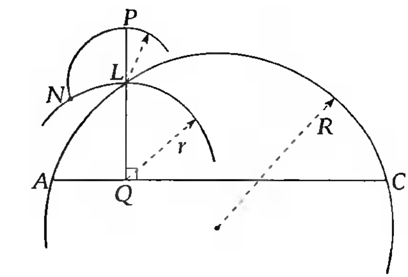
$$\frac{d^2}{r^2}=\frac{\ell}{r}+\frac{d^2}{r^2}\left(\frac{1}{a+1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\ell}{r}=a$$

$$\therefore \quad a=\frac{A_5A_8}{r}$$

Clave D

PROBLEMA N.° 18

En el gráfico, si m$\widehat{AC}$ = 108° y $r(AC)=R(PQ)$, calcule m$\widehat{NL}$.



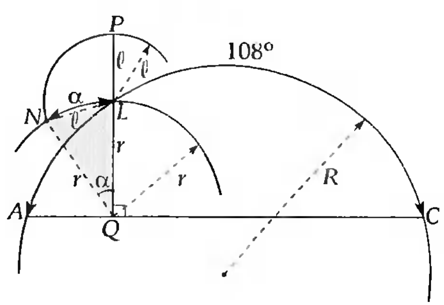
A) 30° B) 36°

C) 44°

D) 54° E) 58°

Resolución

Nos piden m$\widehat{NL}=\alpha$



Del dato:

$$\frac{PQ}{r}=\frac{AC}{R}$$

$$m\widehat{AC}=108° \rightarrow AC=\frac{R(\sqrt{5}+1)}{2}$$

$$\frac{PQ}{r}=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\quad PQ=r+\ell$$

$$\ell=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)r=\ell$$

$$\alpha=\frac{360°}{10}$$

$\therefore\ \alpha=36°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

En un hexágono regular $ABCDEF$, de centro O, se traza interiormente un cuadrado $CDMN$, de centro O_1. Si $AB=2\sqrt{2}$, calcule la longitud de la proyección de $\overline{OO_1}$ sobre $\overline{AO}$.

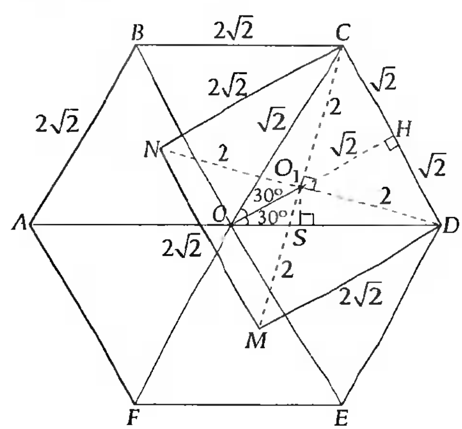
A) $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ B) $\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

C) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

Resolución

Nos piden OS.



Como $ABCDEF$ es un hexágono regular, sus diagonales se intersecan en O.

Siendo AOB; BOC; ...; AOF triángulos equiláteros de lado $2\sqrt{2}$, como $CDMN$ es un cuadrado

$$O_1C=O_1D=2 \text{ y } O_1H=\sqrt{2}$$

Pero en COD: $OH=\sqrt{6}$

$$OO_1=\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$\overline{OS}$ es la proyección ortogonal de $\overline{OO_1}$ sobre $\overline{AO}$.

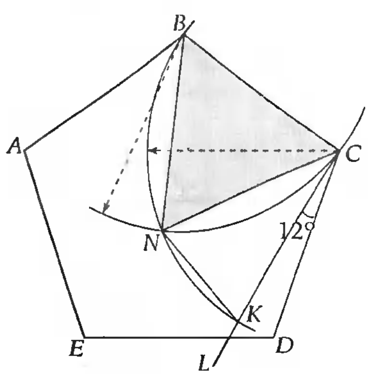
$$OS=OO_1\cdot\cos 30^\circ=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ OS=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

En el gráfico, $ABCDE$ es un pentágono regular cuyo circunradio mide $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Halle NK.



A) $10-\sqrt{5}$

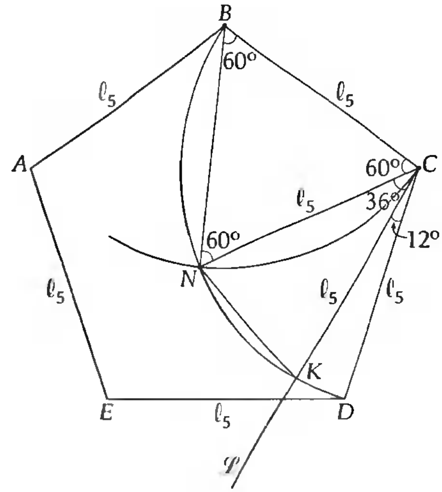
B) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

C) $2-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) $5-\sqrt{5}$

Resolución



Si $CN=CB=BN=\ell_5$, entonces

$$\rightarrow\quad m\measuredangle NCB=60^\circ$$

Como $m\measuredangle DCK=12^\circ$, luego

$$m\measuredangle NCK=36^\circ$$

$$NK=\ell_5\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

pero

$$\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

como

$$R=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\ell_5=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$NK=2\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\therefore\ NK=5-\sqrt{5}$$

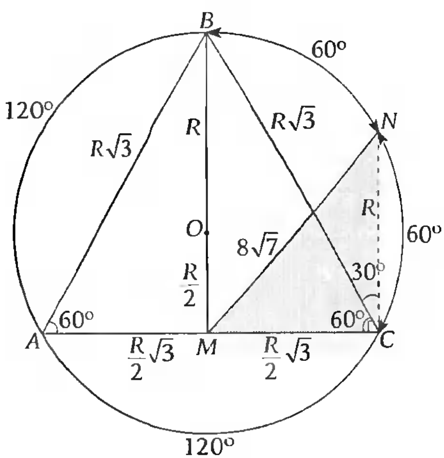
Clave **E**

PROBLEMA N.° 21

En una circunferencia se inscribe un triángulo equilátero ABC. La distancia entre el punto medio del lado AC y el punto medio del arco BC es $8\sqrt{7}$ u. Indique la longitud del lado del triángulo.

A) $16\sqrt{3}$ u B) $12\sqrt{3}$ u C) $20\sqrt{3}$ u
D) $18\sqrt{3}$ u E) $14\sqrt{3}$ u

Resolución



Si N es punto medio de $\overset{\frown}{BC}$

$$m\overset{\frown}{BN} = m\overset{\frown}{NC} = 60°$$

$$\to\ CN = \ell_6 = R$$

También

$$AB = BC = AC = R\sqrt{3}$$

Si M es punto medio de $\overline{AC}$, luego

$$AM = MC = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

También la $m\sphericalangle NCM = 90°$

Luego, en el ⊿ MCN

$$\left(8\sqrt{7}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \ \to\ \left(8\sqrt{7}\right)^2 = \frac{7}{4}R^2$$

$$8\sqrt{7} = \frac{R}{2}\sqrt{7} \ \to\ R = 16$$

Como el lado del triángulo equilátero ABC es $R\sqrt{3}$

$\therefore\ AB = 16\sqrt{3}$

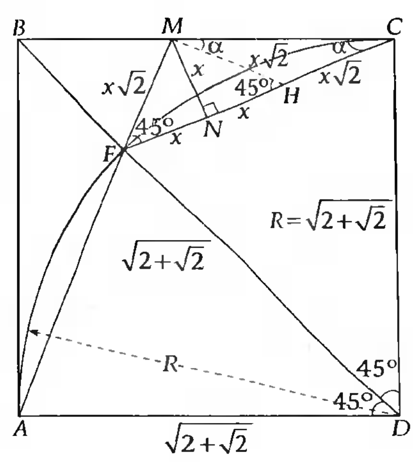
Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Se tiene un cuadrado $ABCD$ de lado $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, con centro en D y con radio igual al lado del cuadrado. Se traza un arco que interseca a $\overline{BD}$ en el punto F. Si la prolongación de $\overline{AF}$ interseca a $\overline{BC}$ en el punto M, calcule MN. Considere que $\overline{MN}$ es perpendicular a $\overline{FC}$ (N en $\overline{FC}$).

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\sqrt{2}-1$
D) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Resolución



En el cuadrante $\overset{\frown}{AFC}$, la m$\measuredangle MFC$=45°

Luego, si

$MN=x$, entonces $FN=x$

Y si

$NH=x$, entonces m$\measuredangle NHM$=45°

Trazamos $\overline{MH}$ de modo que la m$\measuredangle MHF$=45°

$$MH = MF = x\sqrt{2}$$

$$\text{Como la } m\measuredangle BCF = \frac{m\overset{\frown}{FC}}{2} = \frac{45°}{2} = \alpha$$

en el $\triangle HMC$: m$\measuredangle HMC$=m$\measuredangle HCM$=α

$$MH = HC = x\sqrt{2}$$

En el $\triangle FDC$:

$$FC = \ell_8 = R\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$FC = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \quad 2x + x\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 23

Sean $ABCDE$ y $AEFGH$ dos pentágonos regulares. Si por C, D y F se traza una circunferencia de radio R, donde $AB = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ señale BH.

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 5

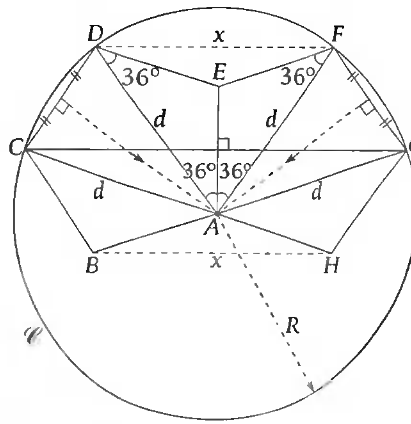
D) $\sqrt{5}+1$ E) $\sqrt{5}-1$

Resolución

Se sabe que $AB = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$, pero en los pentágonos regulares

$$CD = FG = d\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Como $CDFG$ es trapecio isósceles, entonces es inscriptible.



Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia que pasa por C, D, F y G: las mediatrices de $\overline{CD}$ y $\overline{FG}$ pasan por el centro de $\mathscr{C}$, pero ambas pasan por A, por lo tanto A es el centro de $\mathscr{C}$.

$BH=x=DF$

Como

$$AD = AF = R = d = \sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$$

Siendo

m$\measuredangle FAE$=m$\measuredangle DAE$=36°

m$\measuredangle DAF$=72°, luego

$\overline{DF}$ es lado de un pentágono regular de radio d.

$$\rightarrow \quad x = \frac{d}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2}{\sqrt{5}-1}$$

$$\therefore \quad x = 2\sqrt{5}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

En una semicircunferencia, de diámetro AB y centro O, se ubica el punto E. Exteriormente, se construye el cuadrado $BEDC$, tal que $\overline{DO}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Si $\overline{DO}$ interseca a la semicircunferencia en F, determine CF. Además, $BF=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ C) 4 D) 2 E) $\sqrt{2\sqrt{3}}$

Resolución

En la semicircunferencia $m\measuredangle AEB=90°$

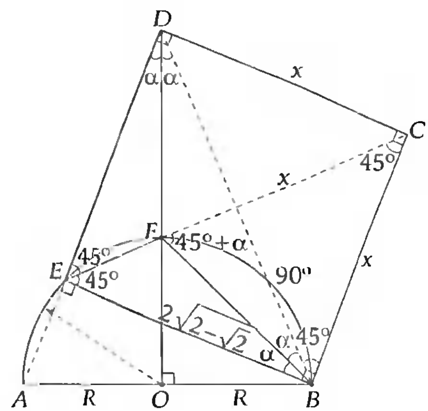
Si $BEDC$ es un cuadrado, la $m\measuredangle DEB=90°$

Entonces A, E y D son colineales.

Como $DO \perp AB$ y $AO=OB=R$

$\rightarrow$ $DA=DB$ y $m\measuredangle ADO=m\measuredangle BDO=\alpha$

También $m\overset{\frown}{BF}=90°$ y $m\measuredangle FEB=45°=m\measuredangle FED$



- E, F y C son colineales.

  $m\measuredangle EBF=\alpha$ y $m\measuredangle FBD=\alpha$

  $m\measuredangle CFB=m\measuredangle CBF=45°+\alpha$ $\rightarrow$ $CF=CB=x$

Luego, en el $\triangle FCB$: $BF=\ell_8$, de centro C y radio x.

$\rightarrow$ $BF=x\sqrt{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

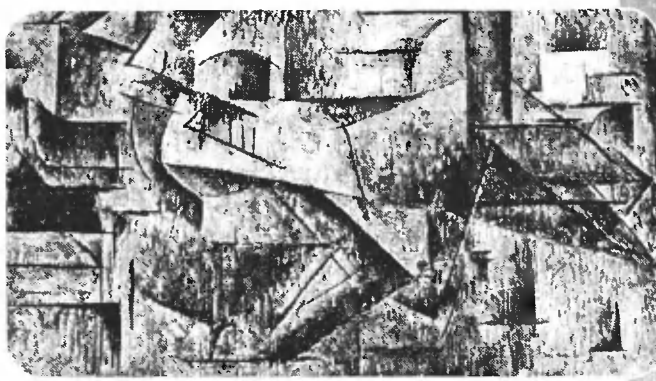
$\therefore$ $x=2$

Clave **D**

Capítulo

18

Áreas de regiones poligonales



Calcular las áreas de terrenos de cultivo para la construcción de viviendas requiere del conocimiento de fórmulas para medirlas.

Nuestros antepasados idearon maneras ingeniosas para poder dar solución a los diversos retos de medición de áreas que se les iba presentando.

También en el campo artístico (pintura), los cubistas hacen uso de regiones sombreadas de diferentes colores para dar ciertos efectos que generen en los espectadores la abstracción, por la rigidez en la forma y el color de sus obras.

Por cuestiones didácticas, este capítulo será dividido en problemas resueltos de área de regiones triangulares y cuadrangulares, así como la relación entre ellas. En una tercera parte abordaremos problemas de áreas de regiones circulares y su relación entre ellas.

Capítulo 18

Áreas de regiones poligonales

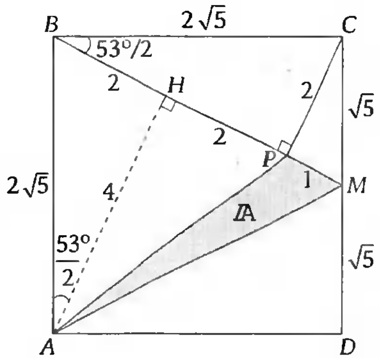
PROBLEMA N.° 1

En un cuadrado $ABCD$ se ubica el punto medio M de $\overline{CD}$, luego se traza $\overline{CP} \perp \overline{BM}$ ($P \in \overline{BM}$). Si $AB=2\sqrt{5}$, calcule el área de la región triangular APM.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle APM}$.



$CM=MD=\sqrt{5}$

$\rightarrow \quad m\sphericalangle MBC=\dfrac{53°}{2}$

$BM=5$, $CP=2$; $PM=1$ y $BP=4$

Trazamos $\overline{AH} \perp \overline{BM}$, entonces

$m\sphericalangle HAB=\dfrac{53°}{2}$ y

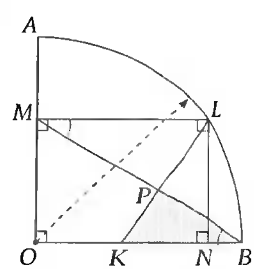
$BH=2$; $AH=4$

$\therefore \quad \mathbb{A}_{\triangle APM}=\dfrac{(1)(4)}{2}=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

En el gráfico mostrado, $OK=KN=2$ y $OM=3$. Calcule el área de la región sombreada.



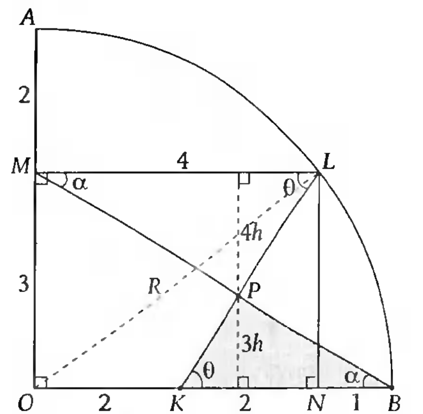
A) $\dfrac{9}{7}$ B) $\dfrac{27}{14}$

C) $\dfrac{27}{8}$

D) $\dfrac{9}{14}$ E) $\dfrac{18}{7}$

Resolución

Nos piden $A_{\triangle KPB}$.
Analizamos el gráfico



Si $ON=4$ y $OM=3$, entonces $OL=R=5$

$NB=1$ y $AM=2$

$\triangle KPB \sim \triangle LPM$

$$\frac{KB}{LM}=\frac{3}{4}$$

Luego

$$7h=3 \rightarrow h=\frac{3}{7}$$

Entonces

$$A_{\triangle KPB}=\frac{KB\times 3h}{2}=\frac{3}{2}(3)\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$\therefore\ A_{\triangle KPB}=\frac{27}{14}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

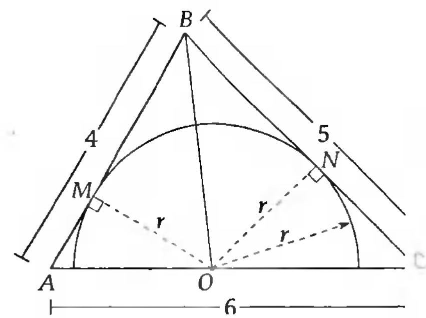
En un triángulo ABC, $AB=4$; $BC=5$ y $AC=6$. Se traza una semicircunferencia con diámetro en $\overline{AC}$ y tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N. Halle el radio de la semicircunferencia.

A) $\frac{4\sqrt{7}}{5}$ B) $\frac{6\sqrt{8}}{7}$ C) $\frac{5\sqrt{7}}{6}$

D) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

Resolución

Analizamos el gráfico



$$p=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}\ \text{(semiperímetro)}$$

$$[AOB]+[BOC]=[ABC]$$

$$\frac{4r}{2}+\frac{5r}{2}=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}$$

$$\frac{9r}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{7}$$

$$\therefore\ r=\frac{5}{6}\sqrt{7}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

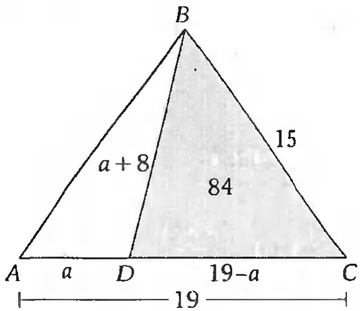
En un triángulo ABC se ubica D en $\overline{AC}$, tal que $DB=AD+8$, $AC=19$ y $BC=15$. Si el área de la región triangular DBC es 84, calcule AD.

A) 5 B) 4 C) 6

D) 8 E) 7

Resolución

Sea $AD=a=x$.



$$p=\frac{a+8+15+19-a}{2}=21$$

$$[DBC]=\sqrt{21(6)(2+a)(13-a)}$$

$$84=3\sqrt{14(2+a)(13-a)}$$

$$(28)^2=14(2+a)(13-a)$$

$$\underbrace{56}=(2+a)(13-a)$$

$$7\times 8=(2+a)(13-a)$$

$$a=5$$

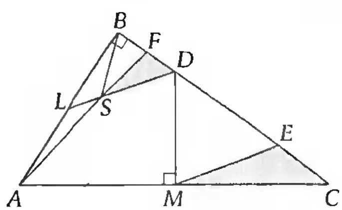
$\therefore\ AD=5$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

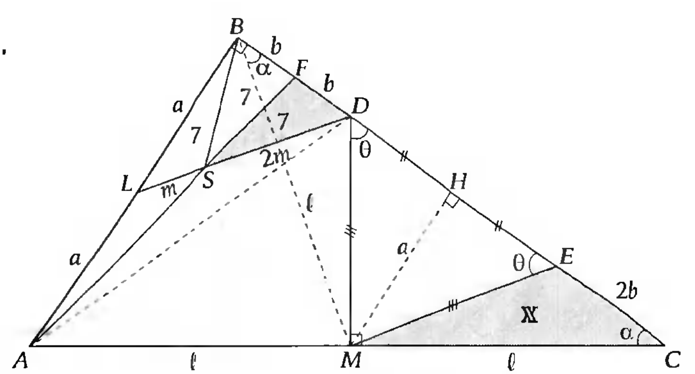
En el gráfico, $AL=LB$, $AM=MC$, $DM=ME$ y $BF=FD$. Si el área de la región SFD es 7, indique el área de la región MEC.

A) 14
B) 21
C) 24
D) 28
E) 35



Resolución

Nos piden $\mathbb{X}$.



En el $\triangle ABD$, S es baricentro; luego $SD=2(SL)$

Como $BF=FD$, entonces $[SBF]=[SFD]=7$

Pero $[SBD]=2[LSB] \rightarrow [LSB]=7$

En el ⊿ABC: $BM=AM=MC=\ell$

Luego, $\triangle BMD \cong \triangle CME$

$$EC=BD=2b \;\; \text{y} \;\; MH=\frac{AB}{2}=a$$

$$\rightarrow [MEC]=\frac{2b\times a}{2}=ab=[LBD]=21$$

$\therefore\ \mathbb{X}=21$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

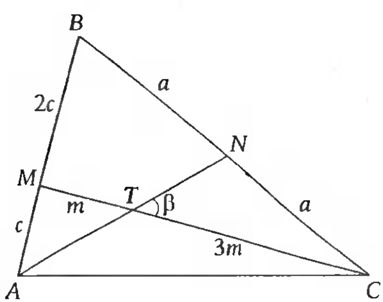
En un triángulo ABC se traza la mediana AN y la ceviana interior CM. $(\overline{AN}\cap\overline{CM}=\{T\})$, tal que $BM=2(AM)$, $(AN)(CM)=K$ y $m\sphericalangle NTC=\beta$. Calcule el área de la región ABC.

A) $\frac{K}{2}\text{sen}\beta$ B) $6K\text{sen}\beta$

C) $\frac{3}{4}K\text{sen}\beta$

D) $\frac{3}{5}K\text{sen}\beta$ E) $K\text{sen}\beta$

Resolución



En el $\triangle MBC$, del teorema de Menelao

$$\frac{CT}{TM}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{AM}{AB}=1$$

$$\rightarrow \frac{CT}{TM}=3$$

$$[ANC]=\frac{1}{2}[ABC]$$

$$\frac{AN\cdot CT}{2}\text{sen}\beta=\frac{[ABC]}{2}$$

$$[ABC]=AN\cdot\frac{3}{4}CM\cdot\text{sen}\beta=\frac{3}{4}\underbrace{(AN\cdot CM)}_{K}\cdot\text{sen}\beta$$

$$\therefore\ [ABC]=\frac{3K}{4}\text{sen}\beta$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

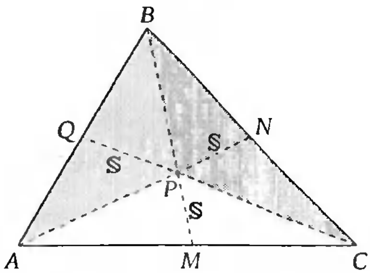
Dado un triángulo ABC, se ubica P en el plano del triángulo, tal que las regiones triangulares APC, APB y BPC sean equivalentes. ¿Cuántos puntos P cumplen dicha condición?

A) 1
B) 2
C) 3
D) infinitos
E) 4

Resolución

Como P está en el plano determinado por ABC, podría estar en la región interna o externa de ABC.

Caso I: si P está en la región interna



Sea S el área de la región APB,

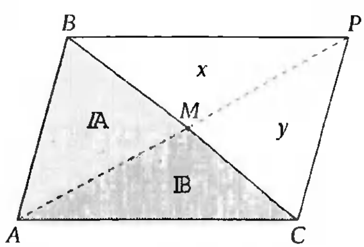
$[APB]=S=[BPC]=[APC]$

Si $[APB]=[BPC]$, entonces $\overline{BM}$ es mediana.

Luego, haciendo el mismo análisis:

$\overline{AN}$ y $\overline{CQ}$ son medianas, por lo que P es baricentro y es único.

Caso II: si P está en la región externa



Del dato:

$[APB]=[APC]=[BPC]$

$A+x=B+y=x+y \;\rightarrow\; A=B=x=y$

Luego, M es punto medio de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ y $ABPC$ es un paralelogramo, con P relativo al lado BC.

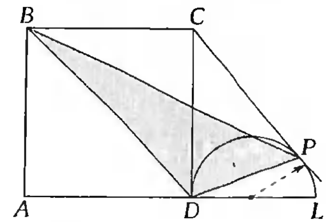
Análogamente existe un P' para $\overline{AC}$ y un P'' para $\overline{AB}$.

Por lo tanto, en el plano existen 4 puntos P que satisfacen la condición del problema.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 8

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Si P es punto de tangencia; $m\widehat{PL}=30°$ y $AB=2$, calcule el área de la región sombreada.



A) $\sqrt{12-3\sqrt{3}}$

B) $2\sqrt{12-4\sqrt{3}}$

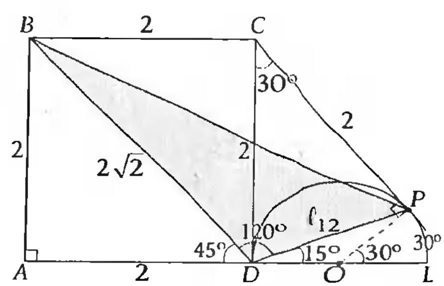
C) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{12-5\sqrt{3}}$

E) $\sqrt{12-7\sqrt{3}}$

Resolución

Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle BDP}$.



$CP=CD=2$

$m\widehat{PL}=30°$

Entonces

$m\sphericalangle POL = 30° = m\sphericalangle PCD$

Luego, en el $\triangle DCP$

$DP = \ell_{12} = 2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

En el $\square ABCD$

$BD = 2\sqrt{2}$

Como $m\sphericalangle BDP = 120°$, entonces

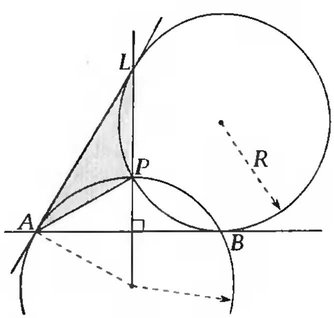
$$|BDP| = \frac{2\sqrt{2}\times\ell_{12}}{2}\operatorname{sen}120° = 2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ |BDP| = \sqrt{12-6\sqrt{3}}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

En el gráfico, A, B y L son puntos de tangencia. Si $R=4$, señale el área de la región triangular APL.

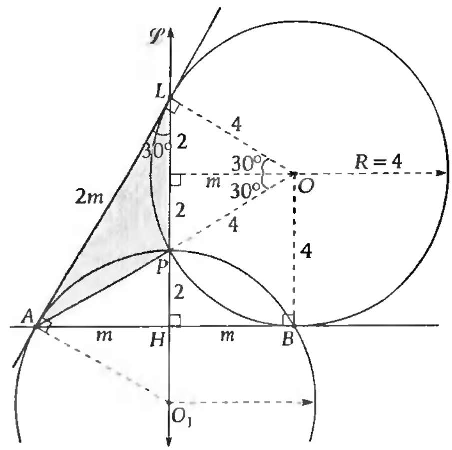


A) $4\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$

C) $6\sqrt{3}$

D) 9 E) 8

Resolución



Sean

$AB = AL = 2m$

Como $\mathscr{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, entonces

$LB = LA = 2m$

$\rightarrow\ \triangle ABL$ es equilátero

$m\sphericalangle ALP = 30° \ \rightarrow\ LP = OL = OP = 4$

$m = 2\sqrt{3} = HA$

$$|APL| = \frac{4\times 2\sqrt{3}}{2}$$

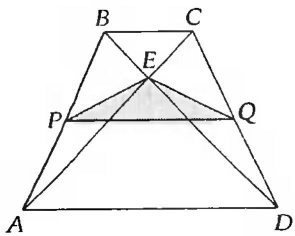
$\therefore\ |APL| = 4\sqrt{3}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

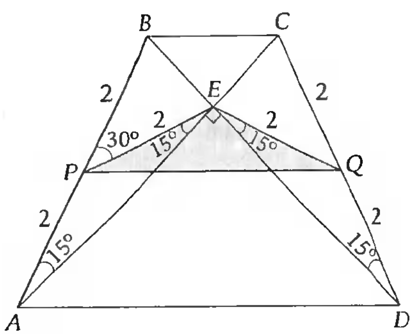
En el gráfico mostrado, $ABCD$ es un trapecio isósceles.

Si $AP=PB=CQ=QD=2$, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ y $m\sphericalangle BPE=30°$, determine el área de la región triangular.



A) 4
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 3

Resolución



En el $\triangle AEB$:

$PE=2$ y $m\measuredangle EAP = m\measuredangle AEP = 15°$

También

$m\measuredangle EDQ = m\measuredangle DEQ = 15°$

$m\measuredangle PEQ = 120°$

$$\rightarrow \ [PEQ] = \frac{2\times 2}{2}\text{sen}\,120° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\therefore \ [PEQ] = \sqrt{3}$

Clave **B**

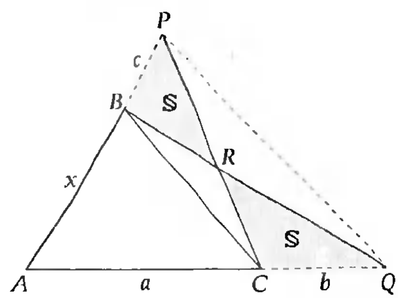
PROBLEMA N.° 11

En un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q en las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $\overline{PC} \cap \overline{BQ} = \{R\}$. Si las regiones triangulares PRB y CRQ son equivalentes; $AC=a$, $CQ=b$ y $PB=c$, determine AB.

A) $\dfrac{ac}{b}$
B) $\dfrac{ab}{c}$
C) $\dfrac{bc}{a}$
D) $\dfrac{bc}{a+c}$
E) $\dfrac{ab}{b+c}$

Resolución

Según condición



$$[PRB]=[CRQ] \ \rightarrow \ [BPQ]=[CQP]$$

Como ambas regiones tienen la misma base, para que sus áreas sean iguales deben de tener la misma altura. Ello implica que $\overline{CB} // \overline{PQ}$.

Luego, en el $\triangle APQ$

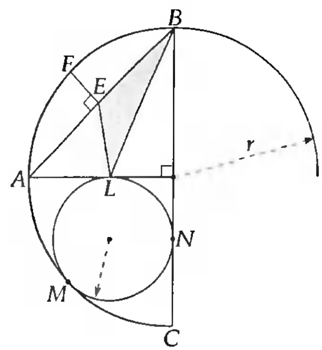
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$$

$$\therefore \ x = \frac{ac}{b}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

En el gráfico, $\overline{FE}$ es la flecha de $\overline{AB}$ y $r=5\sqrt{2\sqrt{2}+2}$. Indique el área de la región sombreada. (M, N y L son puntos de tangencia)



A) $20\sqrt{2}$

B) $25\sqrt{2}$

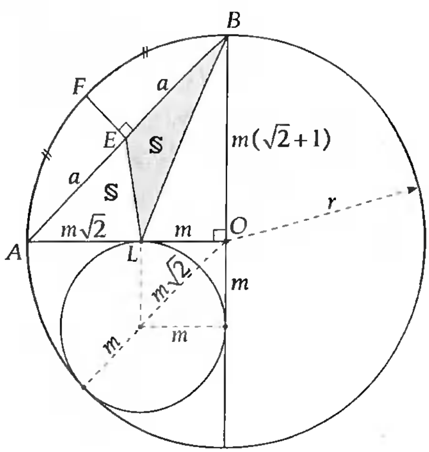
C) $30\sqrt{2}$

D) $40\sqrt{2}$

E) $50\sqrt{2}$

Resolución

Nos piden $\mathbb{S}$.



$$r=5\sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

$AE=EB$ ($\overline{EF}$: flecha), entonces

$$[AEL]=[BEL]=\mathbb{S}$$

$$[ABL]=2\mathbb{S}=\frac{AL\times BO}{2}$$

$$[ABL]=\frac{m\sqrt{2}\times m(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$[ABL]=\frac{m^2}{2}(2+\sqrt{2})$$

Pero

$$r=m(\sqrt{2}+1)=5\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

$$m=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \rightarrow m^2=\frac{25\times 2}{\sqrt{2}+1}$$

$$[ABL]=\frac{25}{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore\ [ABL]=25\sqrt{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 13

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado y T es punto de tangencia. Calcule la razón de las áreas de las regiones sombreadas.

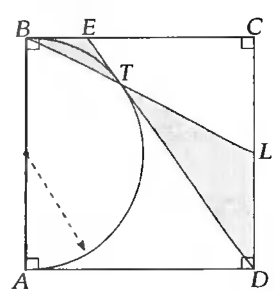
A) 1/4

B) 1/5

C) 1/3

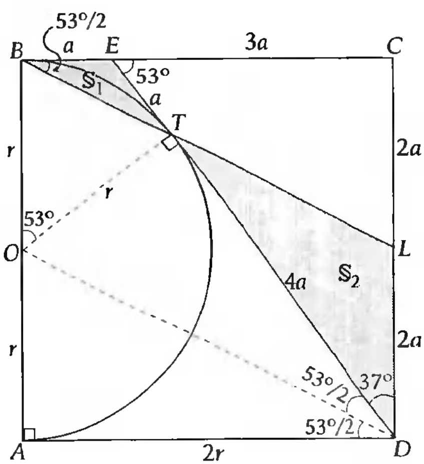
D) 1/6

E) 1/8



Resolución

Piden $\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}$.



m∢ADT=53°=m∢BOT → m∢LBC=53°/2

Luego

m∢DEC=53° y m∢EDC=37°

Si

$BE=a \rightarrow ET=a$

$TD=4a$, $EC=3a$

$CL=LD=2a$

$$\mathbb{S}_1=\frac{a\cdot a}{2}\operatorname{sen}53°$$

$$\mathbb{S}_2=\frac{4a\cdot 2a}{2}\operatorname{sen}37°$$

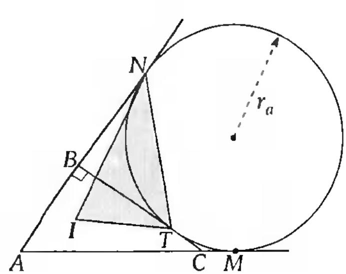
$$\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{4/5}{8(3/5)}$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{1}{6}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, M, N y T son puntos de tangencia. Si I es el incentro del triángulo ABC, señale el área de la región sombreada.



A) $\frac{(r_a)^2}{2}$

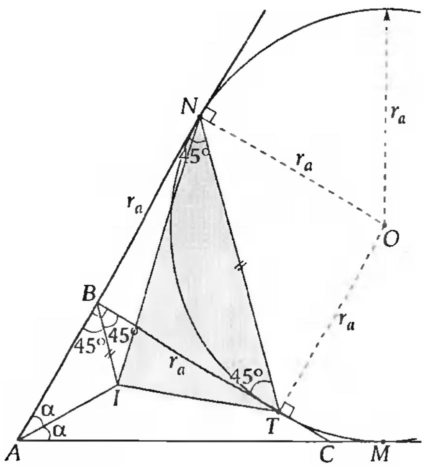
B) $(r_a)^2$

C) $2(r_a)^2$

D) $\frac{(r_a)^2}{3}$

E) $\frac{2(r_a)^2}{3}$

Resolución



En el gráfico:

$$m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = 45°$$

$$\rightarrow \ \overleftrightarrow{BI} \,//\, \overleftrightarrow{NT}$$

$$\therefore \ [INT] = [BNT] = \frac{r_a^{\,2}}{2}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

En un triángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O las áreas de las regiones AOH, BOH y COH son, respectivamente, $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$. Si la recta de Euler es secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, halle la relación entre $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$

A) $\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2=\mathbb{S}_3$

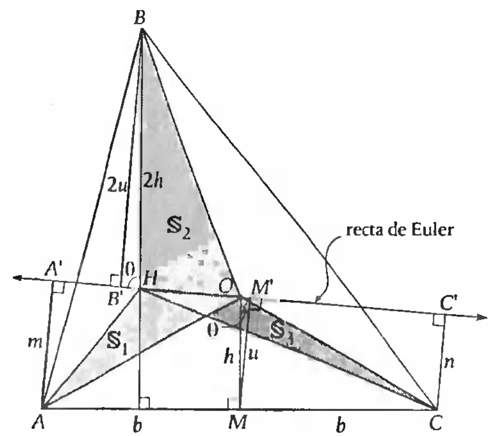
B) $\mathbb{S}_2=\dfrac{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3}{2}$

C) $\mathbb{S}_2=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3$

D) $\mathbb{S}_3=\sqrt{\mathbb{S}_1\cdot\mathbb{S}_2}$

E) $\mathbb{S}_2=\dfrac{2\mathbb{S}_1\,\mathbb{S}_3}{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3}$

Resolución



Del teorema de Euler

$$BH=2(OM)=2h$$

$$m\measuredangle BHB'=m\measuredangle MOM'=\theta$$

$$\rightarrow \ \text{Si } BB'=2u;\ MM'=u$$

En $AA\,C\,C$

$$u=\left(\frac{m+n}{2}\right)\text{(base media)}$$

$$\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=OH\left(\frac{m+n}{2}\right)=OH\cdot u \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{S}_2=\underbrace{OH(2u)}_{2}=(OH\cdot u) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\mathbb{S}_2=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

Calcule el área de la región PQE, si las áreas de las regiones AMP y QNC son $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$

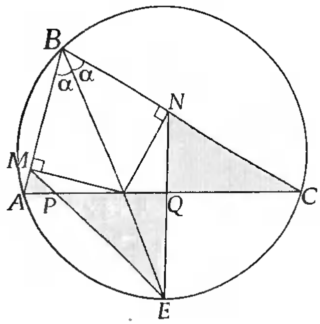
A) $\sqrt{\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2}$

B) $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$

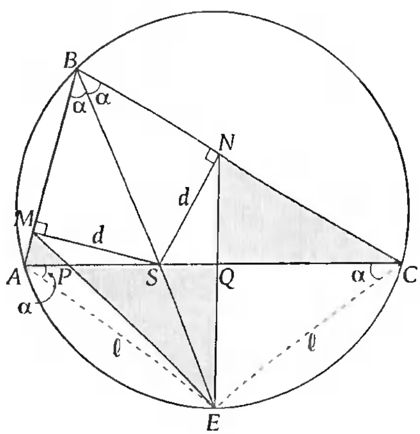
C) $2(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)$

D) $2(\mathbb{A}_1 \quad \mathbb{A}_2)$

E) $\dfrac{2\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2}$



Resolución



Por condición:

$[AMP] = \mathbb{A}_1$

$[QNC] = \mathbb{A}_2$

Nos piden $[PQE] = \mathbb{X}$

Sea $[PMBNQ] = \mathbb{B}$

$[ABC] = \mathbb{A}_1 + \mathbb{B} + \mathbb{A}_2 = \dfrac{d}{2}(AB + BC)$

$[MBNE] = \mathbb{B} + \mathbb{X} = BE \cdot d\cos\alpha$

En $ABCE$, del teorema de Ptolomeo

$(AB + BC)\ell = BE \cdot AC$

pero $AC = 2\ell\cos\alpha$, luego $(AB + BC) = 2(BE) \cdot \cos\alpha$

$BE \cdot d\cos\alpha = \dfrac{d}{2}(AB + BC)$

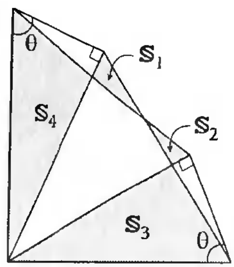
$\rightarrow \mathbb{A}_1 + \mathbb{B} + \mathbb{A}_2 = \mathbb{B} + \mathbb{X}$

$\therefore \mathbb{X} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

Halle la relación correcta, si $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$, $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ son áreas de las regiones sombreadas que se muestran.



A) $\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_4=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3$

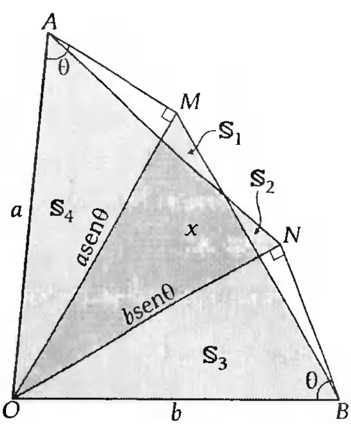
B) $\mathbb{S}_4+\mathbb{S}_3=4(\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2)$

C) $\mathbb{S}_4-\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2$

D) $\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_4+\mathbb{S}_2$

E) $\mathbb{S}_1\times\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2\times\mathbb{S}_4$

Resolución



Sean

$[OAN]=\mathbb{S}_4+x+\mathbb{S}_2$

$[OBM]=\mathbb{S}_3+x+\mathbb{S}_1$

Pero m∢AON=m∢BOM

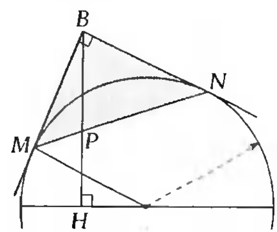
$\rightarrow\ [OAN]=[OBM]$

$\therefore\ \mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_4$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

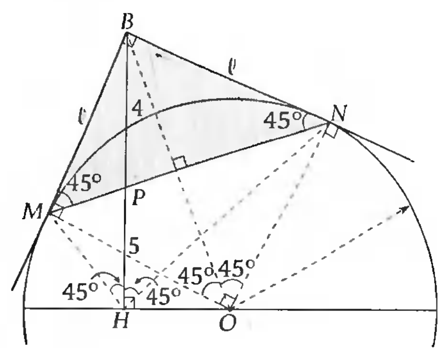
En el gráfico, M y N son puntos de tangencia. Calcule el área de la región MBN, si $BP=4$ y $PH=5$.



A) 12 B) 16 C) 18

D) 24 E) 36

Resolución



Sea

$OHBN$: cuadrilátero inscriptible

m∢BHN=m∢BON=45°

$OHMB$: cuadrilátero inscriptible

m∢MHB=m∢MOB=45°

Luego, $HMBN$ es inscriptible

$\rightarrow$ $MP \cdot PN = (4)(5)$ (teorema de las cuerdas)

En el $\triangle MBN$: $4^2 = \ell^2 - MP \cdot PN$

$\rightarrow$ $\ell^2 = 16 + 20 = 36$

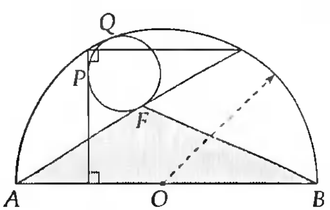
$[MBN] = \dfrac{\ell^2}{2} = \dfrac{36}{2}$

$\therefore$ $[MBN] = 18$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

En el gráfico, P, Q y F son puntos de tangencia. Si $AF=2$, señale el área de la región AFB.



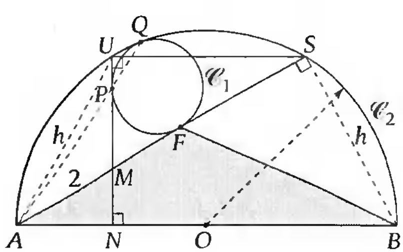
A) 1 B) 2

C) 3

D) $2\sqrt{2}$ E) 4

Resolución

Por dato, $AF=2$.



Si $\overline{NP}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$, A, P y Q son colineales, también el $\square NMSB$ es inscriptible, entonces

$AB \cdot AN = AS \cdot AM$ (I)

En $\mathscr{C}_1$:

$(AF)^2 = AQ \cdot AP$ (II)

Pero si unimos Q con B, en $NPQB$:

$AQ \cdot AP = AB \cdot AN$ (III)

De (I), (II) y (III)

$AS \cdot AM = AF^2 = 2^2 = 4$

Como

$\overline{US} // \overline{AB}$, luego

$\rightarrow$ $AU = BS = h$

Pero

$h^2 = AB \cdot AN = AS \cdot AM = 4$ $\rightarrow$ $h = 2$

$[AFB] = \dfrac{AF \cdot h}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2}$

$\therefore$ $[AFB] = 2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

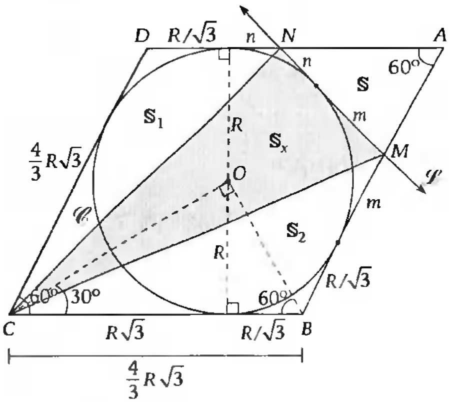
En un rombo $ABCD$, circunscrito a una circunferencia $\mathscr{C}$, se traza una recta $\mathscr{L}$ tangente a $\mathscr{C}$ que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ en M y N, respectivamente.
Si $m\sphericalangle BAD = 60°$, halle el área de la región MCN. (R: radio de $\mathscr{C}$)

A) R^2 B) $R^2\sqrt{2}$

C) $R^2\sqrt{3}$

D) $R^2\sqrt{6}$ E) $3R^2$

Resolución



Del gráfico:

$$\mathbb{S}=m\cdot n\sqrt{3}=(R\sqrt{3}-m)(R\sqrt{3}-n)\sqrt{3}/4$$

$$\mathbb{S}=R^2\sqrt{3}-(m+n)R \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{S}_1=\left(n+\frac{R}{\sqrt{3}}\right)\cdot R;\quad \mathbb{S}_2=\left(m+\frac{R}{\sqrt{3}}\right)\cdot R$$

$$\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2=\frac{2R^2}{\sqrt{3}}+(m+n)R \qquad \text{(II)}$$

$$[ABCD]=\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_x+\mathbb{S} \quad \text{(III)}$$

De (I) y (II) en (III)

$$\frac{8\sqrt{3}R^2}{3}=\frac{2R^2}{\sqrt{3}}+\cancel{(m+n)R}+\mathbb{S}_x+R^2\sqrt{3}-\cancel{(m+n)R}$$

$$\therefore\ \mathbb{S}_x=R^2\sqrt{3}$$

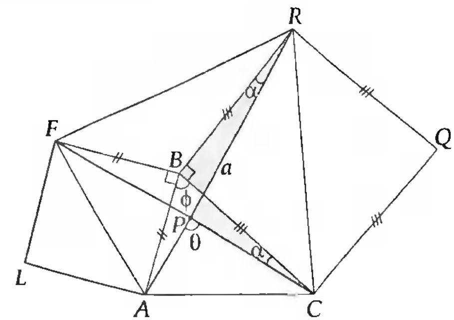
Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

Sobre los lados *AB* y *BC* de un triángulo *ABC* se construyen los cuadrados *ABFL* y *BCQR*, tal que *AR*=*a*. Calcule el área de la región cuadrilátera *AFRC*

A) $a^2/4$ B) $a^2/2$
C) $a^2/8$
D) $a^2/6$ E) $a^2/3$

Resolución



Piden calcular el área de la región *AFRC*: [*AFRC*]. Para ello necesitamos conocer *AR*; *CF* y θ, pero *CF*=*AR*=*a* debido a que los triángulos *FBC* y *ABR* son congruentes (caso L.A.L.). Por ello, la m∢*FCB*=m∢*ARB*=α de donde en *CPRB*: θ=90°

$$[AFRC]=\frac{AR\times CF}{2}\operatorname{sen}\theta=\frac{a\cdot a}{2}\operatorname{sen}90°$$

$$\therefore\ [AFRC]=\frac{a^2}{2}$$

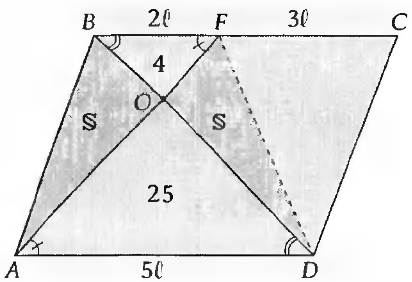
Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

En un paralelogramo *ABCD* se ubica *F* en $\overline{BC}$ y $\overline{BD}\cap\overline{AF}=\{O\}$. Si las áreas de las regiones *BOF* y *AOD* son 4 y 25, respectivamente, calcule el área de la región cuadrangular *OFCD*

A) 31 B) 28 C) 30
D) 27 E) 25

Resolución



Nos piden $[OFCD]$ para ello calculamos las áreas $[OFD]$ y $[FCD]$.

Como las regiones BOF y DOA son semejantes, la razón de sus áreas es igual al cuadrado de sus elementos homólogos, así

$$\frac{[BOF]}{[DOA]}=\frac{BF^2}{AD^2} \rightarrow \frac{4}{25}=\frac{BF^2}{AD^2}$$

$$\rightarrow \frac{BF}{AD}=\frac{2}{5}$$

Si $BF=2\ell$, entonces

$AD=5\ell$ y $FC=3\ell$

En $ABFD$ $(\mathbb{S})^2=(4)(25)$

$\mathbb{S}=10$ $(\mathbb{S}=[AOB])$

$\rightarrow [BDF]=4+10=14$

Luego

$$\frac{[DCF]}{[BDF]}=\frac{3}{2} \rightarrow [DCF]=21$$

$\therefore$ $[OFCD]=10+21=31$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

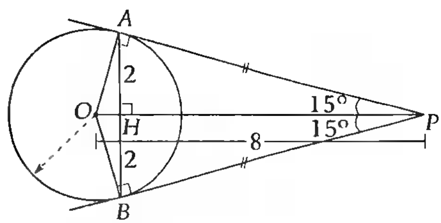
Desde un punto P, exterior a una circunferencia de centro O, se trazan las tangentes PA y PB (A y B son puntos de tangencia)

Si $m\measuredangle AOB=150°$ y $PO=8$, halle el área de la región cuadrangular $PAOB$

A) 8 B) 10
C) 12
D) 16 E) 14

Resolución

Sean $m\measuredangle AOB=150°$ y $OP=8$



Nos piden $[PAOB]$.

Sabemos que si A y B son puntos de tangencia, entonces

$PA=PB$ y $OA=OB$

Por lo tanto, $PAOB$ es un trapezoide simétrico.

Luego

$m\measuredangle APO=m\measuredangle BPO=15°$

Además

$\overline{AB} \perp \overline{OP}$ y $AH=HB$

En el $\triangle OAP$ (notable de 15° y 75°)

$$AH=\frac{OP}{4}=2$$

de donde $AB=4$

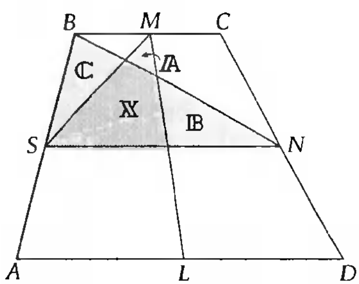
$$[PAOB]=\frac{OP\times AB}{2}=\frac{8\times 4}{2}$$

$\therefore\ [PAOB]=16$

Clave **D**

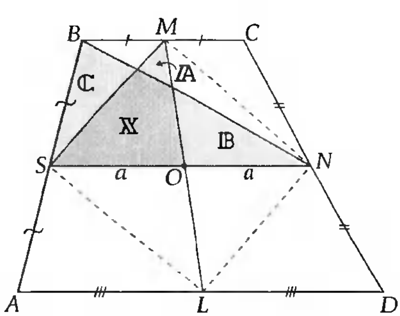
PROBLEMA N.° 24

En el gráfico, $\overline{BC}//\overline{AD}$; M, N, L y S son puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ y $\overline{AB}$. Si $\mathbb{C}+\mathbb{B}=18\mathbb{A}$, calcule $\mathbb{X}$. ($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{X}$ son áreas de las regiones sombreadas)



A) $10\mathbb{A}$
B) $12\mathbb{A}$
C) $14\mathbb{A}$
D) $15\mathbb{A}$
E) $16\mathbb{A}$

Resolución



Del dato:

$\square SMNL$ es un paralelogramo (teorema de Varignon)

Luego $SO=ON$, entonces: $[SMO]=\frac{1}{2}[SMN]$

Además, como $\overline{SN}//\overline{BC}$: $[SBN]=[SMN]$

Luego

$$\mathbb{X}+\mathbb{A}=\frac{1}{2}(\mathbb{C}+\mathbb{X}+\mathbb{B})$$

de donde

$$\mathbb{X}=(\mathbb{B}+\mathbb{C})-2\mathbb{A}$$

Como

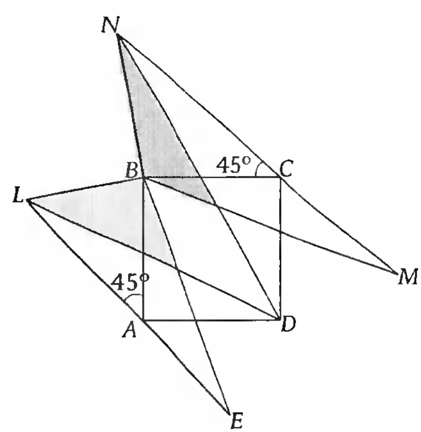
$$\mathbb{B}+\mathbb{C}=18\mathbb{A}$$

$\therefore\ \mathbb{X}=16\mathbb{A}$

Clave **E**

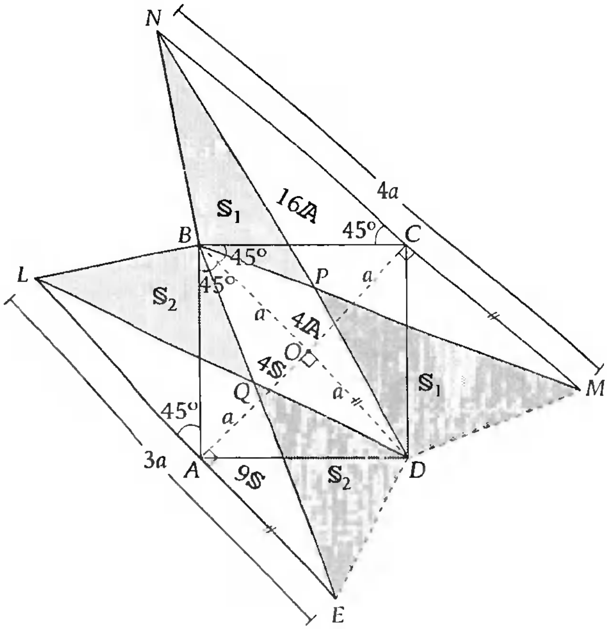
PROBLEMA N.° 25

En el siguiente gráfico, $ABCD$ es un cuadrado, $\frac{NM}{4}=\frac{AC}{2}=\frac{LE}{3}$. Calcule la razón de las áreas de las regiones sombreadas.



A) 11/7
B) 5/3
C) 10/9
D) 7/2
E) 2

Resolución



Del dato:

$$\frac{NM}{4}=\frac{AC}{2}=\frac{LE}{3}=a$$

$\overline{MN}//\overline{BD}//\overline{LE}$

$\triangle BPD \sim \triangle MPN;$

$\triangle BQD \sim \triangle EQL$

$[DPM]=[BPN]=\mathbb{S}_1;$

$[EDQ]=[LBQ]=\mathbb{S}_2$

$$\frac{[BPD]}{[MPN]}=\frac{4}{16} \quad \text{y} \quad \frac{[BQD]}{[LQE]}=\frac{4}{9}$$

Luego

$$S_1^2=(4\mathbb{A})(16\mathbb{A}) \;\rightarrow\; S_1=8\mathbb{A}$$

$\rightarrow\; [MDBN]=36\mathbb{A};$

$$S_2^2=(4\mathbb{S})(9\mathbb{S}) \;\rightarrow\; S_2=6\mathbb{S}$$

$\rightarrow\; [EDBL]=25\mathbb{S}$

Pero

$$[MDBN]=\left(\frac{4a+2a}{2}\right)(a)=3a^2=36\mathbb{A} \qquad \text{(I)}$$

$$[EDBL]=\left(\frac{3a+2a}{2}\right)(a)=\frac{5}{2}a^2=25\mathbb{S} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

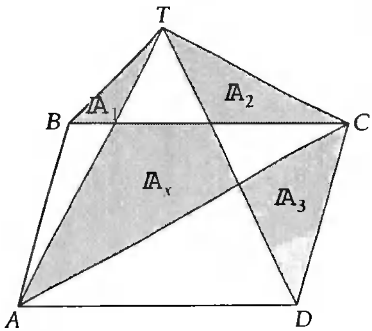
$$\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{S}}=\frac{5}{6} \;\rightarrow\; \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{8\mathbb{A}}{6\mathbb{S}}=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\therefore\; \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{10}{9}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 26

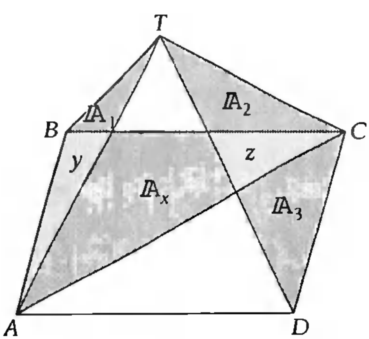
En el siguiente gráfico, $ABCD$ es un romboide y $\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3=\mathbb{A}$. Indique $\mathbb{A}_x$, si $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ y $\mathbb{A}_x$ son áreas de las regiones sombreadas.



A) $\mathbb{A}/2$ B) $3\mathbb{A}/4$ C) $3\mathbb{A}/5$
D) $2\mathbb{A}/3$ E) $\mathbb{A}$

Resolución

Sea $ABCD$ un romboide y $\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3=\mathbb{A}$



Del romboide $ABCD$, sabemos que

$$[ABT]+[CDT]=\frac{1}{2}[ABCD]$$

También: $[ABC]=[ADC]=\dfrac{1}{2}[ABCD]$

$$\rightarrow\ [ABT]+[CDT]=[ABC]$$

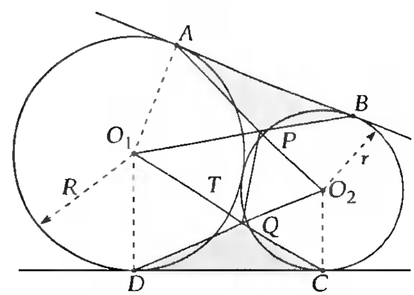
De donde: $(y+\mathbb{A}_1)+(\mathbb{A}_2+z+\mathbb{A}_3)=(y+\mathbb{A}_x+z)$

$\therefore\ \mathbb{A}_x=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3=\mathbb{A}$

Clave **E**

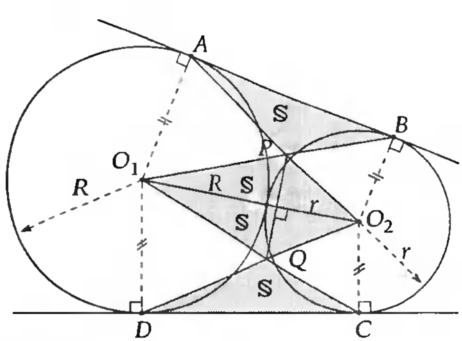
PROBLEMA N.° 27

En el gráfico, A, B, C, D y T son puntos de tangencia. Si $(PQ)(R+r)=18\text{ cm}^2$, halle la suma entre las áreas de las regiones triangulares ABP y CDQ.



A) 6 cm^2 B) 9 cm^2 C) 12 cm^2
D) 15 cm^2 E) 18 cm^2

Resolución



Nos piden

$$[ABP]+[CDQ]=2\mathbb{S}=[O_1PO_2Q].$$

Como

$$\overline{O_1D}//\overline{O_2C} \;\rightarrow\; [DQC]=[O_1QO_2]$$

$$\overline{O_1A}//\overline{O_2B} \;\rightarrow\; [BPA]=[O_1PO_2]$$

Como los trapecios DO_1O_2C y AO_1O_2B son congruentes, entonces

$$[APB]=[DQC]=\mathbb{S}$$

Luego

$$O_1O_2=R+r \text{ y } \overline{PQ}\perp\overline{O_1O_2}$$

$$[O_1PO_2Q]=\frac{O_1O_2\times PQ}{2}=\frac{(PQ)(R+r)}{2}$$

pero del dato

$$(PQ)(R+r)=18 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow\; [O_1PO_2Q]=2\mathbb{S}=\frac{18}{2}=9 \text{ cm}^2$$

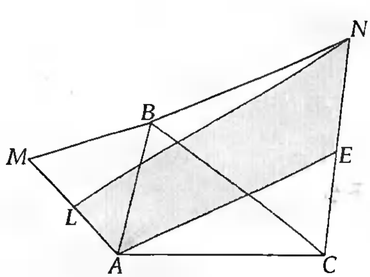
Luego

$$[ABP]+[CDQ]=9 \text{ cm}^2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Según el gráfico, los triángulos ABM y BCN son equiláteros. Si $ML=LA$, $NE=EC$ y $LE=a$, determine el área de la región cuadrangular $LNEA$.



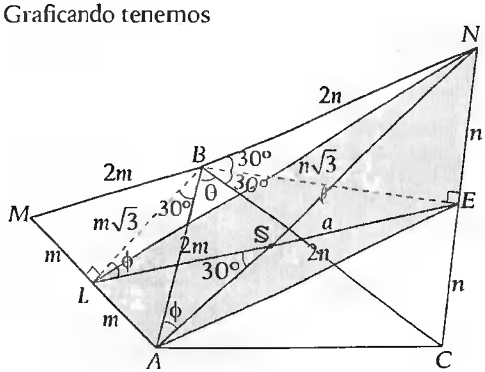
A) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$ B) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$

C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ E) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Resolución

Graficando tenemos



El $\triangle LBE \sim \triangle ABN$, entonces

$$\frac{AN}{LE}=\frac{AB}{LB}$$

$$\frac{\ell}{a}=\frac{2m}{m\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \ell=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

También

$$m\sphericalangle BLE=m\sphericalangle BAN=\phi$$

$$m\sphericalangle ASL=m\sphericalangle ABL=30°$$

$$[ALNE]=\frac{AN\cdot LE}{2}\operatorname{sen}30°$$

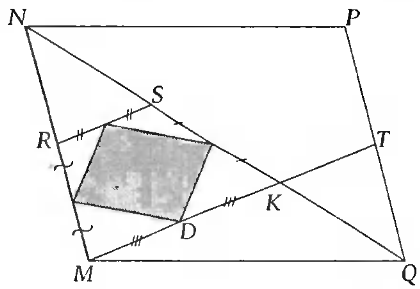
$$\rightarrow\; [ALNE]=\frac{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)\cdot(a)}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\; [ALNE]=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

Clave **D**

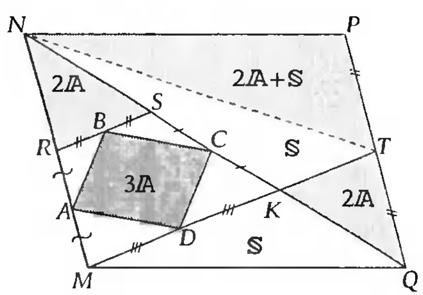
PROBLEMA N.° 29

En el gráfico, el área de la región paralelo-grámica $PQMN$ es $\mathbb{L}$. Si R, S y T son puntos medios de $\overline{MN}$, $\overline{NK}$ y $\overline{PQ}$, señale el área de la región sombreada.



A) $\mathbb{L}/2$ B) $\mathbb{L}/3$ C) $\mathbb{L}/4$
D) $\mathbb{L}/6$ E) $\mathbb{L}/8$

Resolución



$ABCD$ es un romboide (teorema de Varignon) y su área es la mitad de $MRSK$, pero como R y S son puntos medios, entonces

$$[MRSK]=3[RNS]$$

Sea $[ABCD]=3\mathbb{A}$, entonces

$$[MRSK]=6\mathbb{A}$$

$$\rightarrow\ [RNS]=2\mathbb{A}$$

También

$$\triangle MNK \sim \triangle TQK \text{ (de razón 2)}$$

$$[MNK]=4[TQK]$$

$$\rightarrow\ [TQK]=2\mathbb{A}$$

En $\triangle MQTN$

$$\mathbb{S}^2=(2\mathbb{A})(8\mathbb{A})$$

$$\rightarrow\ \mathbb{S}=4\mathbb{A}$$

y como $PT=TQ$

$$[PNT]=[QNT]=2\mathbb{A}+\mathbb{S}=6\mathbb{A}$$

Del dato:

$$[PQMN]=\mathbb{L}=24\mathbb{A}$$

$$\rightarrow\ [ABCD]=3\mathbb{A}=3\left(\frac{\mathbb{L}}{24}\right)$$

$$\therefore\ [ABCD]=\frac{\mathbb{L}}{8}$$

Clave **E**

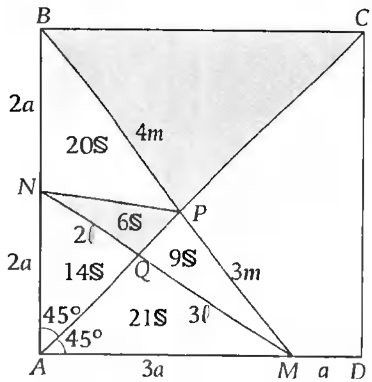
PROBLEMA N.° 30

En un cuadrado $ABCD$ se ubican los puntos N y M en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, tal que $AN=NB$, $AM=3(MD)$, $\overline{BM}\cap\overline{AC}=\{P\}$ y $\overline{NM}\cap\overline{AC}=\{Q\}$. Si el área de la región cuadrada es $560\ u^2$, indique la suma de áreas de las regiones BCP y NPQ.

A) $257\ u^2$
B) $202\ u^2$
C) $215\ u^2$
D) $197\ u^2$
E) $178\ u^2$

Resolución

Graficamos según el dato.



Del teorema de la bisectriz en los triángulos *ANM* y *ABM*

$$\frac{NQ}{QM}=\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{BP}{PM}=\frac{4}{3}$$

Como el área de *NPM* debe ser múltiplo de 3 y de 5, le asignamos un valor 15$\mathbb{S}$

Entonces distribuimos el área según su relación de bases

$$[NPQ]=6\mathbb{S} \text{ y } [MPQ]=9\mathbb{S}$$

Luego, si $[MNP]=15\mathbb{S}$

$$\rightarrow \ [BNP]=20\mathbb{S}$$

Si

$$[BMN]=35\mathbb{S}, \text{ entonces } [NMA]=35\mathbb{S}$$

$$\rightarrow \ [NAQ]=14\mathbb{S} \text{ y } [MAQ]=21\mathbb{S}$$

Como el $\triangle BPC \sim \triangle MPA$

$$[BPC]=\left(\frac{4}{3}\right)^2[APM]=\frac{160\mathbb{S}}{3}$$

Finalmente

$$[ABCD]=\frac{560}{3}\mathbb{S}=560 \text{ u}^2 \text{ (por dato)}$$

$$\rightarrow \ \mathbb{S}=3\text{u}^2$$

$$[BCP]+[NPQ]=\frac{160}{3}\mathbb{S}+6\mathbb{S}$$

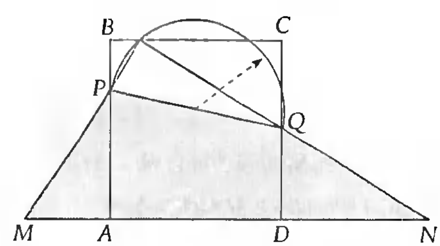
$$[BCP]+[NPQ]=\frac{178}{3}\mathbb{S}$$

$$\therefore \ [BCP]+[NPQ]=178 \text{ u}^2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 31

En el gráfico se tiene el cuadrado *ABCD*
Si $QD=2(BP)=2$ y $PQ=\sqrt{17}$, indique el área de la región sombreada.



A) $\frac{9}{2}(8+\sqrt{2})$

B) $\frac{7}{2}(6+\sqrt{2})$

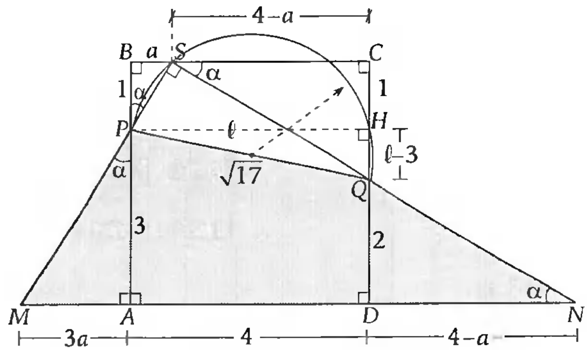
C) $\frac{7}{2}(9+\sqrt{2})$

D) $\frac{5}{2}(4+\sqrt{2})$

E) $\frac{5}{2}(6+\sqrt{2})$

Resolución

Nos piden [*MPQN*].



Si m∢PHQ=90° $\rightarrow$ $CH=BP=1$

Sea ℓ el lado del cuadrado $ABCD$

$\rightarrow$ $HQ=\ell-3$

Luego, en ⊿QHP

$(\sqrt{17})^2=(\ell-3)^2+(\ell)^2$

$\rightarrow$ $\ell=4$

$AP=3$ y $CQ=2$

⊿MAP ~ ⊿SBP: si $BS=a$; $MA=3a$

⊿SCQ ~ ⊿NDQ: $SC=DN=4-a$

Pero

$$\tan\alpha=\frac{a}{1}=\frac{2}{4-a} \rightarrow a=2+\sqrt{2}$$

Luego

$$[MPQN]=\frac{3\times 3(2+\sqrt{2})}{2}+\left(\frac{3+2}{2}\right)\times 4+\frac{2\times(4-2-\sqrt{2})}{2}$$

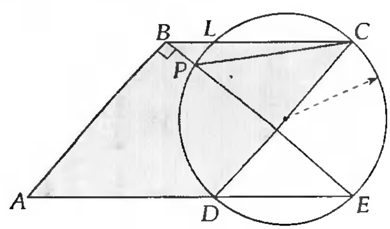
$$\therefore\ [MPQN]=\frac{7}{2}(6+\sqrt{2})$$

Clave **B**

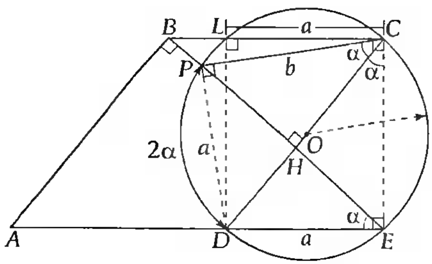
PROBLEMA N.° 32

Según el gráfico, $(PC)(CL)=n$ y $(AB)(BP)=\ell$. Calcule el área de la región romboidal $ABCD$.

A) $2\ell-n$
B) $2(\ell+n)$
C) $\ell+n$
D) $4(\ell+n)$
E) $2(2\ell-n)$



Resolución



$\overline{PE} \perp \overline{DC}$

$m\sphericalangle DEC=90°$

$m\sphericalangle PCD=m\sphericalangle PED=\alpha$

$\rightarrow\ m\sphericalangle ECD=\alpha$

$DP=DE$

$\rightarrow\ CL=ED=DP=a$

$[ABCD]=AB\times BH=AB(BP+PH)$

$[ABCD]=(AB)(BP)+(AB)(PH)$

En el $\triangle DPC$

$DC\times PH=a\cdot b=(CL)(CP)=n$

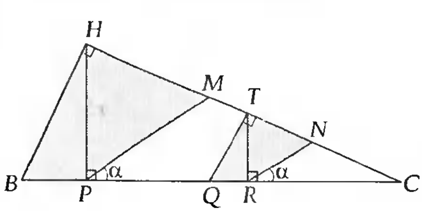
Como $CD=AB\ \rightarrow\ (AB)(PH)=n$

$\therefore\ [ABCD]=\ell+n$

Clave **C**

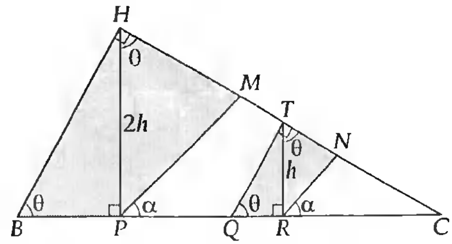
PROBLEMA N.° 33

En el gráfico, $PH=2(TR)$. Halle la relación de áreas de las regiones sombreadas.



A) 4/3
B) 9/4
C) 2
D) 4
E) 16/9

Resolución



$\triangle BHP \sim \triangle QTR$ con razón de semejanza 2

$\triangle PHM \sim \triangle RTN$ con razón de semejanza 2

$\square BHMP \sim \square QTNR$ con razón de semejanza 2

$$\therefore\ \frac{|BHMP|}{|QTNR|}=2^2=4$$

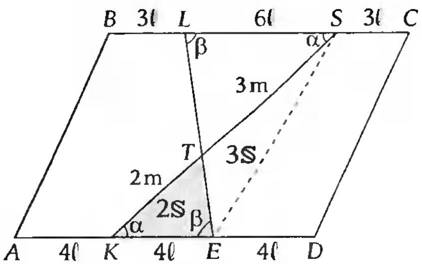
Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

En un paralelogramo $ABCD$ se ubican los puntos L y S que pertenecen a $\overline{BC}$. Si K y E pertenecen a $\overline{AD}$, tal que $LS=2(BL)=2(SC)$ y $AK=KE=ED$, y el área de la región paralelográmica es $\mathbb{L}$, calcule el área de la región triangular KTE. $(\overline{KS}\cap\overline{LE}=\{T\})$

A) $\frac{\mathbb{L}}{8}$
B) $\frac{\mathbb{L}}{15}$
C) $\frac{\mathbb{L}}{10}$
D) $\frac{\mathbb{L}}{12}$
E) $\frac{\mathbb{L}}{20}$

Resolución



$\triangle KTE \quad \triangle STL$: $\dfrac{KT}{TS}=\dfrac{KE}{SL}=\dfrac{2}{3}$

Luego, si $[KTE]=2\mathbb{S}$

$\rightarrow \ [ETS]=3\mathbb{S}$

$\rightarrow \ [KSE]=5\mathbb{S}$

Luego

$[ASD]=3[KSE]=15\mathbb{S}=\dfrac{1}{2}[ABCD]$

$\rightarrow \ [ABCD]=30\mathbb{S}=\mathbb{L}$

$\therefore \ [KTE]=2\mathbb{S}=\dfrac{\mathbb{L}}{15}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

Dado un paralelogramo *ABCD*, en $\overline{BC}$ se ubica *T* tal que las áreas de las regiones *TCD* y *ABD* están en la razón de uno a tres. Si *AB*=10 y el cuadrilátero *ABTD* es bicéntrico, determine el área de la región *ABTD*

A) $37\sqrt{6}$ B) $40\sqrt{6}$

C) $39\sqrt{6}$

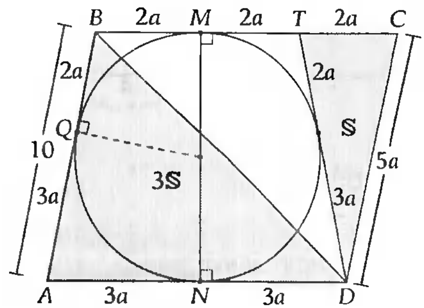
D) $42\sqrt{6}$ E) $32\sqrt{6}$

Resolución

Datos:

AB=10

ABTD: bicéntrico (inscriptible y circunscriptible)



$[ABD]=[BDC]=3[TDC]$

$[BDT]=2[TDC]$

$\rightarrow \ BT=2(TC)$

Como *ABTD* es trapecio, por ser inscriptible debe ser isósceles; además, *BM*=*MT*=*TC* y *AN*=*ND*

$|ABTD|=\sqrt{AB\cdot BT\cdot TD\cdot AD}$

Como *AD*=*BC*, luego $2(AN)=3(TC)=6a$

$AQ=AN=3a$ y $BQ=BM=2a$

$AB=5a=10$

$\rightarrow \ a=2$

$BT=4a=8$; $TD=5a=10$ y $AD=6a=12$

$|ABTD|=\sqrt{10\cdot 8\cdot 10\cdot 12}$

$\therefore \ [ABTD]=40\sqrt{6}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

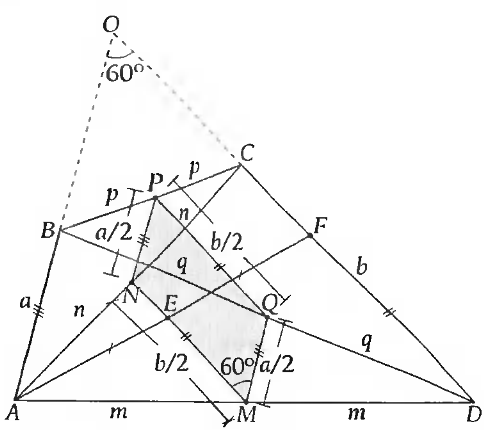
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de lados $AB=a$ y $CD=b$, donde la medida del ángulo que forman las prolongaciones de dichos lados es 60°. Calcule el área de la región cuyo perímetro es el lugar geométrico de todos los puntos medios de los segmentos cuyos extremos estén en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.

A) $\dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$ B) $\dfrac{ab\sqrt{6}}{8}$

C) $\dfrac{ab\sqrt{3}}{8}$

D) $\dfrac{ab\sqrt{2}}{8}$ E) $ab\sqrt{3}$

Resolución



Tomando puntos extremos de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
N, punto medio de $\overline{AC}$; Q, punto medio de $\overline{BD}$; P, punto medio de $\overline{BC}$; M, punto medio de $\overline{AD}$.
Ahora, consideremos un punto genérico de $\overline{CD}$ como el punto F y su punto medio E.

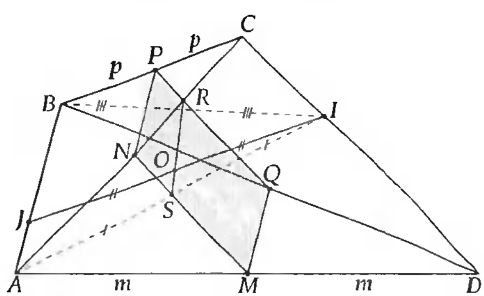
Fácilmente puede demostrarse que $E \in \overline{MN}$, es decir que para todo punto de $\overline{CD}$ y con extremo en A sus puntos medios conforman $\overline{MN}$.

Análogamente, los puntos medios de los segmentos con extremo en C y otro en $\overline{AB}$ están contenidos en $\overline{NP}$.

Así también, los puntos medios de los segmentos con extremo en B y en $\overline{CD}$ están contenidos en $\overline{PQ}$.

Y los puntos medios de los segmentos con extremo en D y en $\overline{AB}$ están contenidos en $\overline{QM}$.

Entonces, para cualquier otro segmento con extremos en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, pero diferentes de A, B, C y D, su punto medio se encuentra en la región $MNPQ$.



En el $\triangle BCD$: para todo I de $\overline{CD}$ el punto medio R de $\overline{IB}$ pertenece a $\overline{PQ}$.

En el $\triangle ACD$: para todo I de $\overline{CD}$ el punto medio de S de $\overline{IA}$ pertenece a $\overline{NM}$.

En el $\triangle BIA$: para todo J de $\overline{AB}$ el punto medio de O de $\overline{IJ}$ pertenece a $\overline{RS}$. ($O \in$ a la región $MNPQ$)

Pero

$$MN=PQ=b/2 \text{ y } MQ=NP=a/2$$

Además, $\overline{MN}//\overline{DC}$ y $\overline{NP}//\overline{AB}$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle NMQ$=m$\sphericalangle AOD$=60°

$$[MNPQ]=MN\cdot MQ\operatorname{sen}60°=\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ [MNPQ]=\frac{ab\sqrt{3}}{8}$$

Clave C

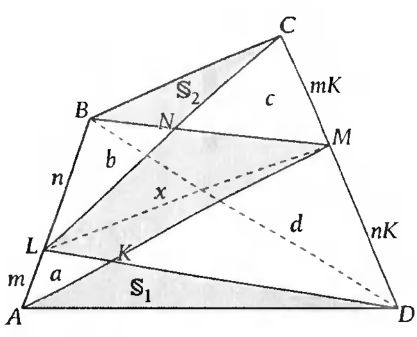
PROBLEMA N.° 37

Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos L y M, respectivamente. Si $\overline{LD}$ y $\overline{LC}$ intersecan a $\overline{MA}$ y $\overline{MB}$ en K y N donde $\frac{CM}{MD}=\frac{AL}{LB}$, calcule el área de la región $KMNL$. Considere que $\mathbb{A}_{\triangle ADK}+\mathbb{A}_{\triangle BCN}=10\ \text{u}^2$.

A) $5\ \text{u}^2$ B) $8\ \text{u}^2$ C) $5\sqrt{2}\ \text{u}^2$

D) $5\sqrt{3}\ \text{u}^2$ E) $10\ \text{u}^2$

Resolución



Sea $[KMNL]=x$

$\mathbb{A}_{\triangle ADK}=\mathbb{S}_1$

$\mathbb{A}_{\triangle BCN}=\mathbb{S}_2\ \rightarrow\ \mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2=10$ u

$$\frac{CM}{MD}=\frac{AL}{LB}=\frac{m}{n}$$

Sean $a=[AKL]$; $b=[BNL]$; $c=[MNC]$ y $d=[KMD]$

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } DLC\text{: } \dfrac{[MLN]+c}{[MKL]+d}=\dfrac{m}{n}\\[2ex] \text{En } AMB\text{: } \dfrac{[MKL]+a}{[MNL]+b}=\dfrac{m}{n}\end{array}\right\}\ \frac{x+c+a}{x+b+d}=\frac{m}{n}\qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } BCD\text{: } \dfrac{\mathbb{S}_2+c}{[MBD]}=\dfrac{m}{n}\\[2ex] \text{En } ABD\text{: } \dfrac{a+\mathbb{S}_1}{[BDL]}=\dfrac{m}{n}\end{array}\right\}\ \frac{\mathbb{S}_1+c+a+\mathbb{S}_2}{b+x+d}=\frac{m}{n}\qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

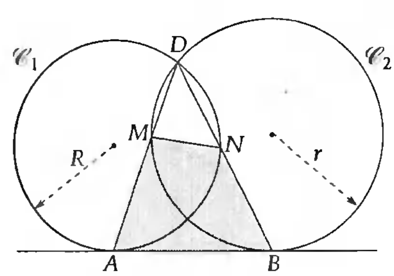
$a+c+x=a+c+\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2$

$\therefore\ x=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2=10\ \text{u}^2$

Clave E

PROBLEMA N.° 38

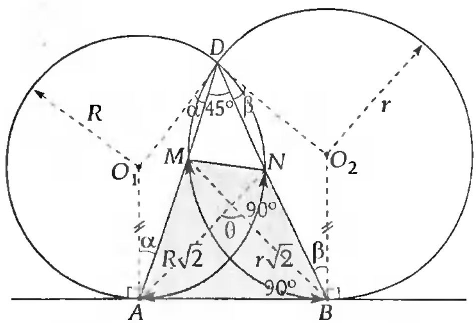
En el gráfico mostrado, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son dos circunferencias ortogonales. Si A y B son puntos de tangencia, determine el área de la región $AMNB$.



A) Rr B) $2Rr$ C) $Rr\sqrt{2}$

D) $Rr\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $Rr\frac{\sqrt{2}}{4}$

Resolución



Como $\overline{AO_1} // \overline{BO_2}$, entonces $m\sphericalangle ADB = \alpha + \beta$

Además, $m\sphericalangle O_1DO_2 = 90° = 2(\alpha+\beta)$

$\alpha+\beta = 45° \rightarrow m\sphericalangle ADB = 45°$

Luego

$m\widehat{AN} = m\widehat{BM} = 90°$

$\rightarrow \quad AN = R\sqrt{2} \quad y \quad BM = r\sqrt{2}$

También

$m\sphericalangle ABM = \frac{1}{2} m\widehat{BM} = 45°$ y

$m\sphericalangle BAN = \frac{1}{2} m\widehat{AN} = 45°$

$\theta = 90°$

$\rightarrow \quad [AMNB] = \frac{R\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\theta$

$\therefore \quad [AMNB] = Rr$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

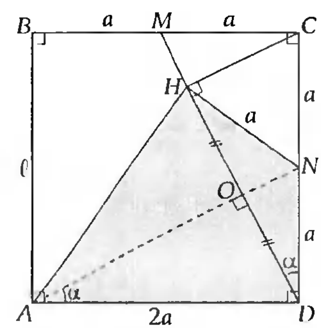
En un cuadrado $ABCD$, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Luego, de C se traza $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{DM}$ (H en $\overline{MD}$). Calcule el área de la región $AHND$, si $AB = \ell$.

A) $\frac{\ell^2}{4}$ B) $\frac{\ell^2}{3}$

C) $\frac{\ell^2}{6}$

D) $\frac{\ell^2}{2}$ E) $\frac{3}{4}\ell^2$

Resolución



Si M es punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\alpha = 53°/2$

pero

$m\sphericalangle NAD = 53°/2$

$\overline{AN} \perp \overline{MD} \rightarrow \overline{AN} // \overline{CH}$

Y como N es punto medio de $\overline{CD}$, entonces

$HO = HD$

Como $AB = \ell \rightarrow MD = \frac{\ell}{2}\sqrt{5} = AN$

También

$HD = 2 \cdot \left(\frac{\ell}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\ell\sqrt{5}}{5}$

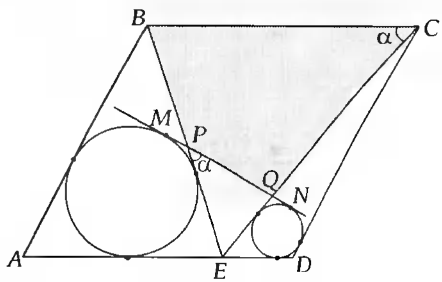
$[AHND] = \frac{AN \cdot HD}{2} = \frac{\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{2\ell\sqrt{5}}{5}\right)}{2}$

$\therefore \quad [AHND] = \frac{\ell^2}{2}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

En el gráfico mostrado, $ABCD$ es un rombo y M y N son los puntos de tangencia. Si $AD=8$, $PQ=3$ y $CQ=6$, indique el área de la región $PBCQ$.

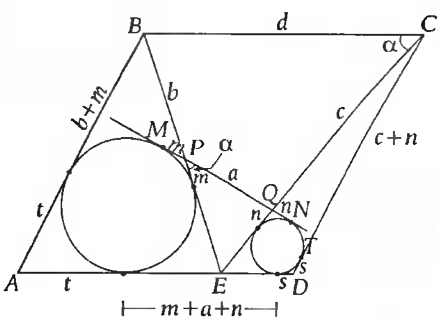


A) $9\sqrt{6}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$

D) $9\sqrt{5}$ E) $12\sqrt{5}$

Resolución

$ABCD$: rombo $\rightarrow$ $AB=BC=CD=AD$



$AD=d=8$

$PQ=a=3$

$CQ=c=6$

$d=b+m+t=c+n+s=a+m+n+s+t$

$b+c+m+n+s+t=d+a+m+n+s+t$

$\rightarrow$ $b+c=d+a$

Por lo tanto, el cuadrilátero $BPQC$ es circunscriptible.

Pero del dato, también es inscriptible

$\rightarrow$ $BPQC$ es bicéntrico

Como $b+6=8+3$ $\rightarrow$ $b=5$

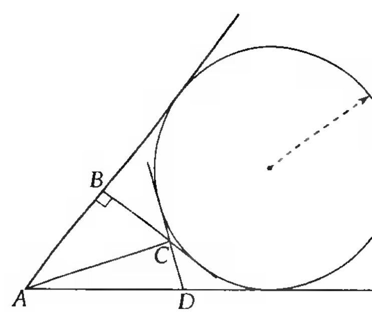
$$[BPQC]=\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d}=\sqrt{3\cdot 5\cdot 6\cdot 8}$$

$$\therefore\ [BPQC]=12\sqrt{5}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 41

Del gráfico, $ABCD$ es un cuadrilátero exinscrito, tal que $AD=5$, $BC=3$ y $CD=2$. Señale el área del círculo inscrito en el triángulo ABC.



A) π B) 4π C) 2π

D) $\pi/2$ E) $\pi/4$

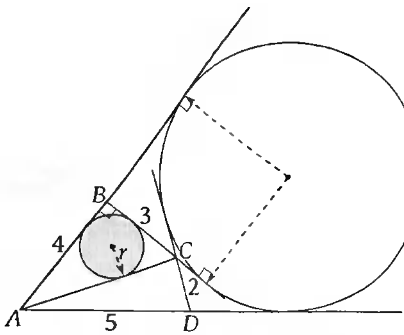
Resolución

Del teorema de Steiner para cuadriláteros exinscritos

$AD-BC=AB-CD$

$5-3=AB-2$

$\rightarrow$ $AB=4$



En el ⊾ABC: $AC=5$

Del teorema de V. Poncelet

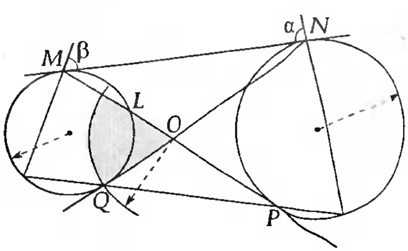
$4+3=5+2r \rightarrow r=1$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\bigcirc}=\pi r^2=\pi$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 42

En el gráfico, M, N, P y Q son puntos de tangencia. Si $\alpha+\beta=145°$, $2(ML)=3(LO)=6$ cm, halle el área de la región sombreada.



A) 2π cm^2

B) $11\pi/9$ cm^2

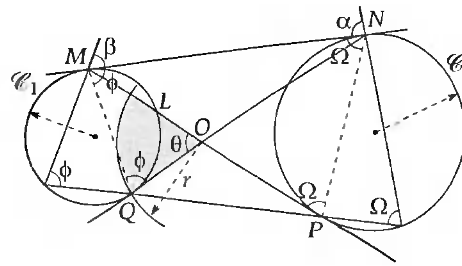
C) $35\pi/18$ cm^2

D) $37\pi/18$ cm^2

E) $39\pi/16$ cm^2

Resolución

$\alpha+\beta=145°$; $ML=3$; $LO=2$



En $\mathscr{C}_1$

$(OQ)^2=(OM)(OL)=(5)(2)=10$

$\rightarrow\ r=\sqrt{10}$

Para calcular el área del sector circular sombreado solo falta conocer θ.

Para ello aprovechamos que $NQ=MN$ y $MP=MN$

En

MQN: $m\sphericalangle MNQ=180°-2\phi$

MNP: $m\sphericalangle NMP=180°-2\Omega$

$\rightarrow\ \triangle OMN$: $\theta=360°-2(\phi+\Omega)$

pero

$\theta+\Omega=\alpha+\beta=145°$

$\rightarrow\ \theta=70°$

$$\mathbb{A}_{\triangleleft}=\frac{\pi(70°)}{360°}\cdot(\sqrt{10})^2$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\triangleleft}=\frac{35\pi}{18}\ \text{cm}^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 43

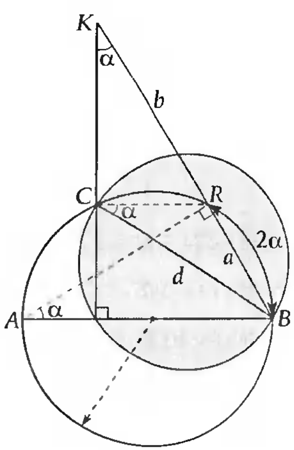
Se tiene una circunferencia de diámetro AB. Se consideran los puntos C y R en los arcos AB y CB; luego, la prolongación de $\overline{BR}$ interseca a la perpendicular al diámetro trazado por C en K. Si $BR=a$ y $RK=b$, indique el área del círculo de diámetro $\overline{BC}$.

A) $\frac{\pi}{4}b(b-a)$ B) $\frac{\pi}{4}b(a+b)$

C) $\frac{\pi}{4}a(b-a)$

D) $\frac{\pi}{4}a(a+b)$ E) $2\pi a(a+b)$

Resolución



$m\sphericalangle RCB=m\sphericalangle RAB=\alpha$

Como $m\sphericalangle ARB=90°$

$m\sphericalangle ABR=90°-\alpha$

$\rightarrow\ m\sphericalangle CKB=\alpha$

Luego, $\triangle BCR \sim \triangle BKC$

$\rightarrow\ (BC)^2=(BK)(BR)$

Si $BC=d$, entonces

$$d^2=(a+b)(a)$$

Pero el área del círculo sombreado es $\frac{\pi d^2}{4}$.

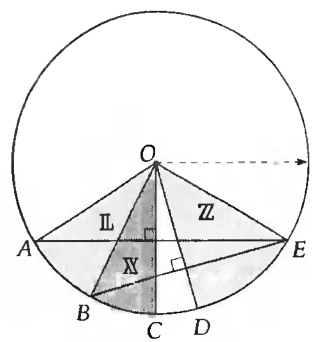
$$\therefore\ \mathbb{A}_{\bullet}=\frac{\pi a(a+b)}{4}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

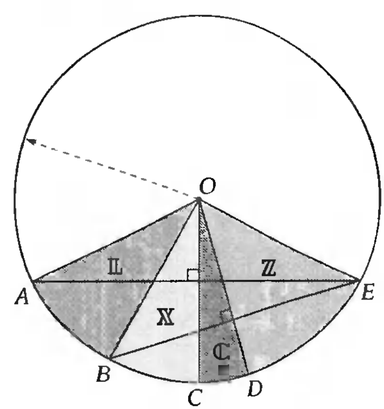
En el gráfico, $\mathbb{Z}-\mathbb{X}=\mathbb{A}$. Calcule $\mathbb{L}$. ($\mathbb{X}$, $\mathbb{L}$ y $\mathbb{Z}$ son áreas de las regiones sombreadas)

A) $\mathbb{A}/2$
B) $\mathbb{A}$
C) $2\mathbb{A}$
D) $\mathbb{A}/3$
E) $3\mathbb{A}$



Resolución

Si $\mathbb{Z}-\mathbb{X}=\mathbb{A}$, nos piden $\mathbb{L}$.



Sea $\mathbb{C}$ el área del sector DOC.

Como $\overline{OC} \perp \overline{AE}$, entonces

$\triangleleft AOC \cong \triangleleft EOC$ y análogamente

$\overline{OD} \perp \overline{BE} \rightarrow \triangleleft BOD \cong \triangleleft EOD$

Luego

$\mathbb{L}+\mathbb{X}=\mathbb{C}+\mathbb{Z}$ (I)

$\mathbb{X}+\mathbb{C}=\mathbb{Z}$ (II)

De (I) y (II)

$\mathbb{L}=2\mathbb{C}$

De (II)

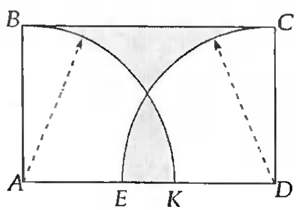
$\mathbb{Z}-\mathbb{X}=\mathbb{C}=\mathbb{A}$

$\therefore \mathbb{L}=2\mathbb{A}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 45

En el gráfico, $ABCD$ es un rectángulo, mientras que BAK y CDE son cuadrantes. Si $BC=3\sqrt{2}$ y $CD=\sqrt{6}$, calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



A) $3\sqrt{3}-\pi$

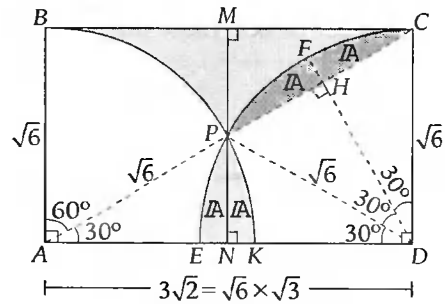
B) $3\sqrt{3}+\pi$

C) $4\sqrt{3}-\pi$

D) $2\sqrt{3}-\pi$

E) $2\sqrt{3}+\pi$

Resolución



En el $\triangle APD$

$AD = AP\sqrt{3} = PD\sqrt{3}$

$m\measuredangle PAD = m\measuredangle PDA = 30°$

$\rightarrow m\measuredangle PAB = m\measuredangle PDC = 60°$

$\triangle CDH \cong \triangle PDH \cong \triangle PDN$

Luego, el segmento circular PC es equivalente a la región limitada por el triángulo mixtilíneo EPK.

Además A, P y C son colineales.

Entonces, la región sombreada es equivalente a la región mixtilínea BPC.

$$\mathbb{A}_{\triangle BPC}=\mathbb{A}_{\triangle ABC}-\mathbb{A}_{\triangleleft ABP}$$

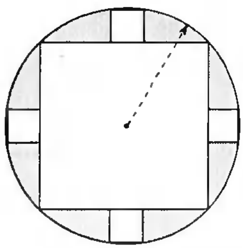
$$\mathbb{A}_{\triangle BPC}=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}-\frac{\pi\sqrt{6}^2}{6}$$

$$\therefore \mathbb{A}_{(\text{reg. somb})}=\mathbb{A}_{\triangle BPC}=3\sqrt{3}-\pi$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 46

En el gráfico, los cuadriláteros son cuadrados. Si la longitud del cuadrado mayor mide ℓ metros, halle el área de la región sombreada en metros cuadrados.

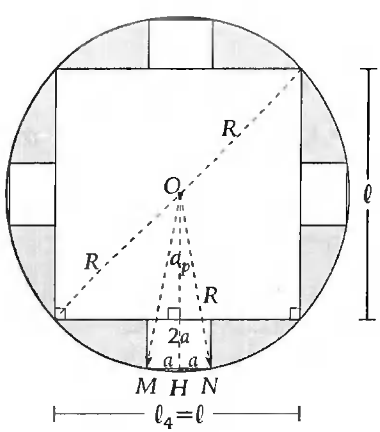


A) $\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{29}{24}\right)$ B) $\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{29}{25}\right)$

C) $\ell^2\left(\pi-\frac{29}{50}\right)$

D) $\ell^2\left(\pi-\frac{27}{24}\right)$ E) $\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{25}{24}\right)$

Resolución



Si $\ell_4=\ell \rightarrow a_p=1/2$

Sea $2a$ el lado del cuadrado menor

En $\triangle MOH$: $R^2=a^2+(2a+a_p)^2$

Como $2R=\ell\sqrt{2}$

$$\frac{\ell^2}{2}=a^2+\left(2a+\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$a=\frac{\ell}{10} \rightarrow 2a=\frac{\ell}{5}$$

Sea área de la región sombreada $=\mathbb{S}_x$

$$\mathbb{S}_x=\mathbb{A}_{\bullet}-\mathbb{A}_{\blacksquare(\ell)}-4(\mathbb{A}_{\blacksquare(2a)})$$

$$\mathbb{S}_x=\pi\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2-\ell^2-4(\ell/5)^2=\frac{\pi\ell^2}{2}-\frac{29}{25}\ell^2$$

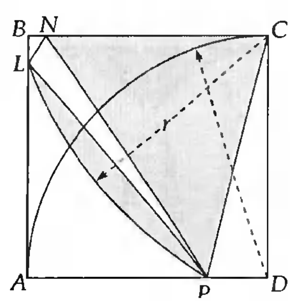
$$\mathbb{S}_x=\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{29}{25}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{S}_x=\frac{\ell^2}{50}(25\pi-58)$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 47

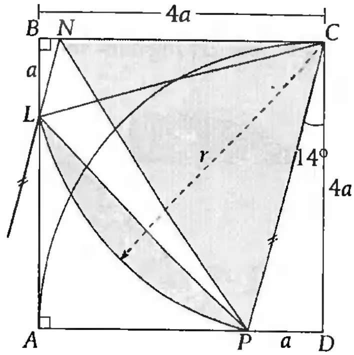
En el gráfico, $\overline{CP}//\overline{NL}$, $m\sphericalangle PCD=14°$ y $ABCD$ es un cuadrado. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi r^2}{6}$ B) $\frac{13\pi r^2}{90}$ C) $\frac{31\pi r^2}{180}$

D) $\frac{17\pi r^2}{90}$ E) $\frac{8\pi r^2}{45}$

Resolución



Dato:

$CP=CL=r$

Como la m$\sphericalangle PCD=14°$

$$\frac{PD}{CD}=\frac{1}{4}$$

Si $PD=a \;\rightarrow\; CD=4a$

Luego

$$r=a\sqrt{17}$$

Como

$BC=4a$ y $CL=a\sqrt{17}$

$BL=a$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle LCB=14°$

Además

$\overline{NL}//\overline{PC} \;\rightarrow\; [PNC]=[PLC]$

Luego, la región sombreada es equivalente al sector circular PCL (de centro C).

Pero

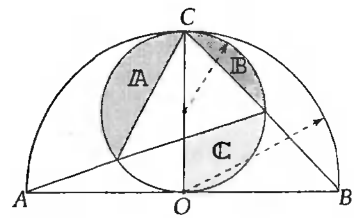
$$m\sphericalangle PCL=90°-2(14°)=62°$$

$$\therefore\; [\sphericalangle PCL]=\frac{\pi(62)}{360}\cdot r^2=\frac{31\pi}{180}r^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 48

En el gráfico, $OB=12\sqrt{10}$ Calcule $\mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}$, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ representan las áreas de las regiones sombreadas (O y C son puntos de tangencia).



A) $127\pi-132$

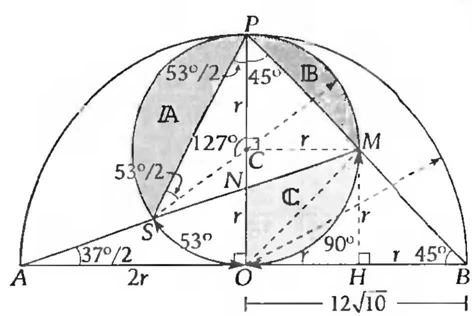
B) $127\pi-264$

C) $143\pi-108$

D) $143\pi-159$

E) $143\pi-264$

Resolución



$\overline{PO}\perp\overline{AB}$

m$\sphericalangle OPB=$m$\sphericalangle OBP=45°$

$CM=CP=r$, entonces

m$\sphericalangle PCM=90°$

$MH=CO=OH=r$

En el $\triangle AMH$: m$\sphericalangle MAH=\dfrac{37°}{2}$

Pero $m\widehat{OM}=90°$

Luego

$$\frac{37°}{2}=\frac{90°-m\widehat{SO}}{2} \rightarrow m\widehat{SO}=53°$$

$$\rightarrow m\sphericalangle SPO=m\sphericalangle PSC=\frac{53°}{2} \text{ y}$$

$$m\sphericalangle PCS=127°$$

La región de área $\mathbb{C}$ es igual al área del segmento circular OM más el área de $[MON]$.

Calculamos las áreas por partes.

$$\mathbb{A}=\frac{127\pi}{360}r^2-\frac{r^2}{2}\text{sen}\,127°=\frac{r^2}{10}\left(\frac{127}{36}\pi-4\right)$$

$$\mathbb{B}=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}=\frac{r^2}{4}(\pi-2)$$

$$\mathbb{C}=[MON]+\mathbb{A}_{\frown OM}=[MON]+\mathbb{B}$$

Nos piden

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}=\mathbb{A}-[MON]$$

$$|MON|=\left(\frac{2}{3}r\right)\cdot\frac{r}{2}=\frac{r^2}{3}$$

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}=\frac{r^2}{10}\left(\frac{127\pi}{36}-4\right)-\frac{r^2}{3}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}=r^2\left(\frac{127\pi}{360}-\frac{11}{15}\right)$$

Pero

$$2r=12\sqrt{10} \rightarrow r=6\sqrt{10}$$

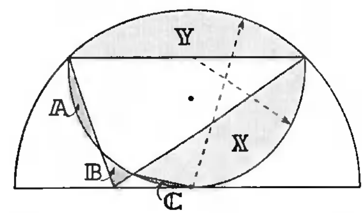
$$r^2=360$$

$$\therefore \mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}=127\pi-264$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 49

En el gráfico, $\mathbb{A}+\mathbb{C}=\mathbb{B}$. Calcule $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{X}$ son áreas de las regiones sombreadas.



A) $(\pi-1)$

B) $\dfrac{2(\pi-1)}{\pi-2}$

C) $\dfrac{\pi-2}{2(\pi-1)}$

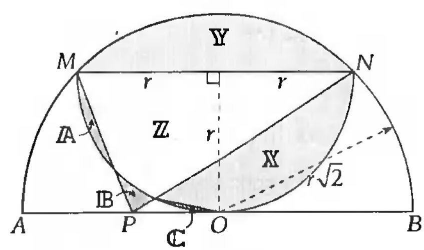
D) $\dfrac{3(\pi-1)}{2(\pi-2)}$

E) $\dfrac{4(\pi-1)}{3(\pi-2)}$

Resolución

Nos piden $\dfrac{\mathbb{X}}{\mathbb{Y}}$.

Dato: $\mathbb{A}+\mathbb{C}=\mathbb{B}$



$$[PMN]=\mathbb{B}+\mathbb{Z}=\frac{(2r)(r)}{2}=r^2$$

$$[\frown MN]=\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{Z}+\mathbb{X}=\pi r^2$$

$$\mathbb{Y}=[\frown MN]=\mathbb{A}_{\sphericalangle MON}-\mathbb{A}[MON]=\frac{\pi(r\sqrt{2})^2}{4}-r^2$$

$$\mathbb{Y}=[\frown MN]=\frac{\pi r^2}{2}-r^2$$

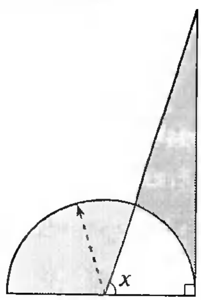
$$\therefore\ \frac{\mathbb{X}}{\mathbb{Y}}=\frac{\pi r^2-r^2}{\frac{\pi}{2}r^2-r^2}=\frac{2(\pi-1)}{(\pi-2)}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 50

En el siguiente gráfico, las regiones mostradas son equivalentes. Determine x.

A) $\arctan(2\pi)$
B) $\arctan(4\pi)$
C) $\text{arccot}(\pi)$
D) $143°/2$
E) $\arctan(\pi)$

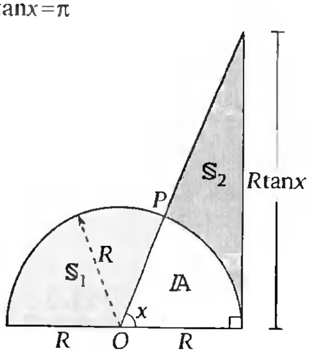


Resolución

Sean $\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2 \ \rightarrow\ \mathbb{S}_1+\mathbb{A}=\mathbb{S}_2+\mathbb{A}$

$$\frac{\pi R^2}{2}=\frac{R^2\tan x}{2}$$

Luego, $\tan x=\pi$

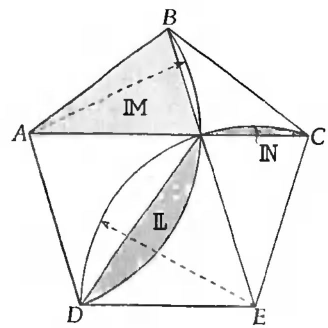


$\therefore\ x=\arctan(\pi)$

Clave **E**

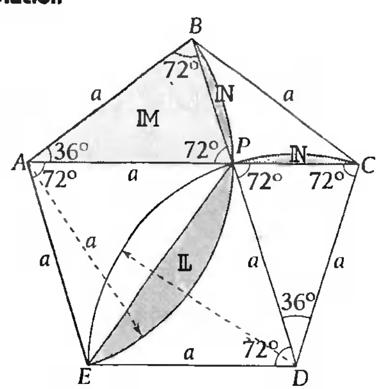
PROBLEMA N.° 51

En el gráfico se muestra un pentágono regular, $ABCDE$.
Si $2(\mathbb{M}+\mathbb{N})-\mathbb{L}=18\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,\text{u}^2$ ($\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{L}$ representan las áreas de las regiones mostradas), calcule el área del círculo cuyo radio es AB.



A) $36\pi\ \text{u}^2$
B) $72\pi\ \text{u}^2$
C) $108\pi\ \text{u}^2$
D) $144\pi\ \text{u}^2$
E) $169\pi\ \text{u}^2$

Resolución



Como

$\triangle ABP \cong \triangle DPC$

$\mathbb{M}+\mathbb{N}=\mathbb{A}_{\frown ABP}$

También

$m\sphericalangle EAP=2(m\sphericalangle PAB)=72°$

$\mathbb{A}_{\triangleleft EAP}=2\mathbb{A}_{\triangleleft ABP}$

$[PAE]=2(\mathbb{M}+\mathbb{N})-\mathbb{L}$

$\rightarrow\ [PAE]=18\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (I)

También

$$[PAE]=\frac{\ell_5\times a_{P_5}}{2}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{a}{4}(\sqrt{5}+1)}{2}$$

$$[PAE]=\frac{a^2}{16}(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

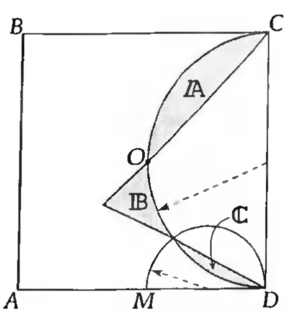
$\rightarrow\ a^2=144$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\bigcirc}=\pi a^2=144\pi\ u^2$

Clave D

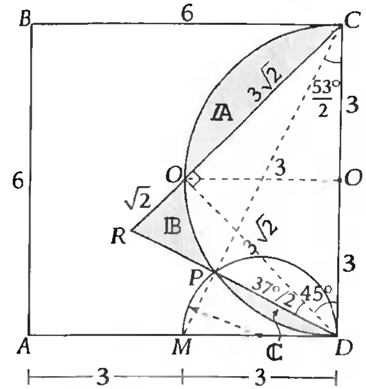
PROBLEMA N.° 52

Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O y lado 6 cm, $AM=MD$. Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son áreas de las regiones sombreadas, halle $\mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}$



A) $3\ cm^2$ B) $4\ cm^2$ C) $6\ cm^2$
D) $3\sqrt{2}\ cm^2$ E) $8\ cm^2$

Resolución



Sea

$m\sphericalangle MPD=90°$ y

$m\sphericalangle CPD=90°$

M, P y C son colineales

$\rightarrow\ m\sphericalangle MCD=\dfrac{53°}{2}$

También

$m\sphericalangle ODP=\dfrac{37°}{2}$

Luego, en el $\triangle ROD$

$OD=3(OR)$

Pero

$OD=OC=3\sqrt{2}$

$\rightarrow\ OR=\sqrt{2}$

También

$\mathbb{A}_{\frown OC}=\mathbb{A}_{\frown OPD}=\mathbb{A}$

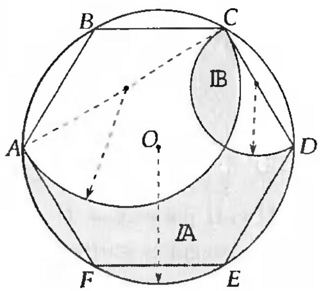
$$\mathbb{B}+(\mathbb{A}-\mathbb{C})=[ROD]=\frac{\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=3\ cm^2$$

$\therefore\ \mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}=3\ cm^2$

Clave A

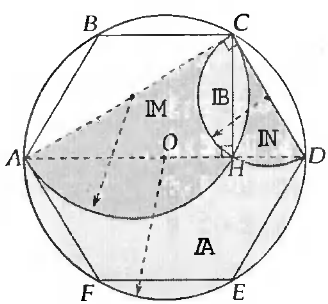
PROBLEMA N.° 53

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ áreas de las regiones sombreadas. Calcule el área de la región hexagonal regular *ABCDEF*. Considere que $\mathbb{A}-\mathbb{B}=4\ u^2$.



A) $4\ u^2$ B) $9\ u^2$ C) $16\ u^2$
D) $8\ u^2$ E) $12\ u^2$

Resolución



En el hexágono regular *ABCDEF*

$m\measuredangle ACD=90°$

Si H es la intersección de las semicircunferencias de diámetros CD y AC, entonces

$m\measuredangle CHA=90°$ y

$m\measuredangle CHD=90°$

Por lo tanto, A, H y D son colineales, y también colineales con O.

$$\mathbb{A}_{\frown CD}=\mathbb{B}+\mathbb{N};\quad \mathbb{A}_{\frown AC}=\mathbb{M}+\mathbb{B}$$

También

$$\mathbb{A}_{\triangle ACD}+\mathbb{A}_{\frown AD}=\mathbb{M}+\mathbb{B}+\mathbb{N}+\mathbb{A}$$

Por teorema de Hipócrates

$$\mathbb{A}_{\frown CD}+\mathbb{A}_{\frown AC}=\mathbb{A}_{\frown AD}$$

$$\mathbb{B}+\mathbb{N}+\mathbb{M}+\mathbb{B}=\mathbb{M}+\mathbb{B}+\mathbb{N}+\mathbb{A}-\mathbb{A}_{\triangle ACD}$$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\triangle ACD}=\mathbb{A}-\mathbb{B}=4\ u^2$$

Pero

$$\mathbb{A}_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}\mathbb{A}_{\hexagon ABCDEF}$$

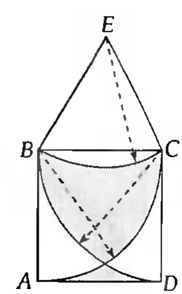
$$\therefore\ \mathbb{A}_{\hexagon ABCDEF}=12\ u^2$$

Clave **E**

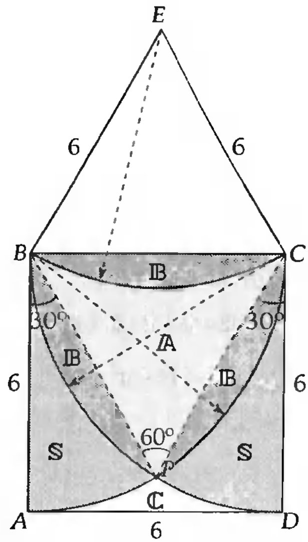
PROBLEMA N.° 54

En el gráfico mostrado, indique el área de la región sombreada. Considere que *ABCD* es un cuadrado de lado 6 m y *BEC* un triángulo equilátero.

A) $(36-8\sqrt{3})\ m^2$
B) $(36-9\sqrt{3})\ m^2$
C) $(36-18\sqrt{3})\ m^2$
D) $(36-2\pi\sqrt{3})\ m^2$
E) $(36-6\pi-9\sqrt{3})\ m^2$



Resolución



Sea $\mathbb{S}_x$ el área de la región sombreada.

$$\mathbb{S}_x=\mathbb{A}+2\mathbb{B}+\mathbb{C}$$

Pero

$$\mathbb{A}+2\mathbb{S}+3\mathbb{B}=\mathbb{A}_{\triangle PBC}+2\mathbb{S}+2\mathbb{B}$$

$$\mathbb{A}_{\triangle PBC}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$$

$$\mathbb{B}+\mathbb{S}=\frac{6^2\pi}{12}=3\pi$$

$$\mathbb{B}=\mathbb{A}_{\text{◓} EBC}-\mathbb{A}_{\triangle EBC}$$

$$\mathbb{B}=\frac{\pi(6)^2}{6}-9\sqrt{3}=6\pi-9\sqrt{3}$$

Entonces

$$\mathbb{S}=9\sqrt{3}-3\pi$$

Luego

$$\mathbb{S}_x+\mathbb{B}=\mathbb{A}_{\square ABCD}-2\mathbb{S}$$

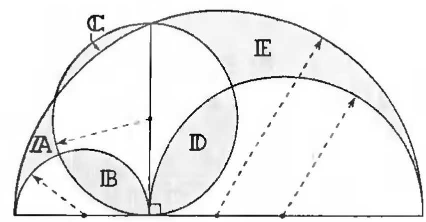
$$\mathbb{S}_x+(6\pi-9\sqrt{3})=36-2(9\sqrt{3}-3\pi)$$

$$\therefore\quad \mathbb{S}_x=36-9\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 55

Indique la relación correcta, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ y $\mathbb{E}$ son áreas de las regiones sombreadas.



A) $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}=\mathbb{D}+\mathbb{E}$

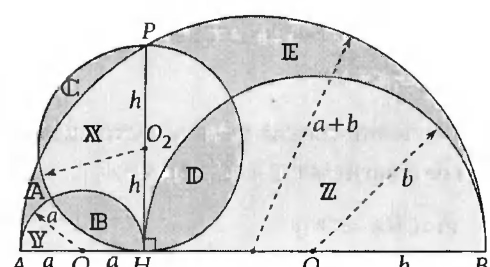
B) $\mathbb{B}+\mathbb{D}=\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{E}$

C) $\mathbb{A}+\mathbb{E}=\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}$

D) $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{D}=\mathbb{E}+\mathbb{C}$

E) $\mathbb{E}=\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}$

Resolución



Sean también $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ áreas de las regiones que se indican en el gráfico.

Luego

$$\mathbb{B}+\mathbb{Y}=\frac{\pi a^2}{2};\quad \mathbb{D}+\mathbb{Z}=\frac{\pi b^2}{2}$$

$$\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{X}=\pi h^2$$

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{D}+\mathbb{E}+\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=\frac{\pi(a+b)^2}{2}$$

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{D}+\mathbb{E}+\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=\frac{\pi a^2}{2}+\frac{\pi b^2}{2}+\pi ab$$

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{D}+\mathbb{E}+\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=\mathbb{B}+\mathbb{Y}+\mathbb{D}+\mathbb{Z}+\pi ab$$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}+\mathbb{E}+\mathbb{X}=\pi ab \qquad \text{(I)}$$

Pero

$(PH)^2=AH\cdot HB$, de donde $h^2=ab$

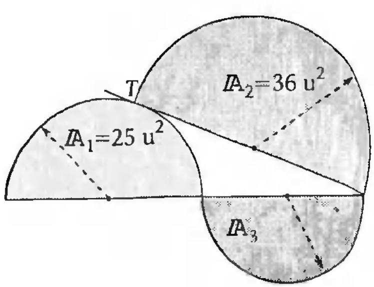
$$\rightarrow\ \pi ab=\pi h^2=\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{X} \qquad \text{(II)}$$

$\therefore$ De (I) y (II): $\mathbb{A}+\mathbb{E}=\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 56

En el gráfico mostrado, calcule $\mathbb{A}_3$ si $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_3$ son las áreas de las regiones sombreadas.



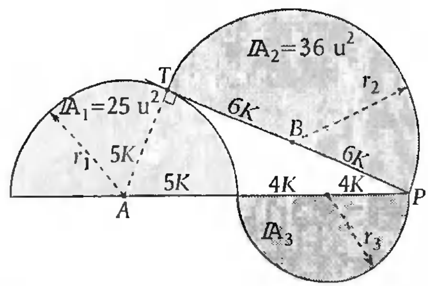
A) 11 u^2
B) 16 u^2
C) 9 u^2
D) 10 u^2
E) 18 u^2

Resolución

T: punto de tangencia

$\rightarrow$ m$\measuredangle ATP=90°$

Las semicircunferencias que limitan las regiones sombreadas son semejantes.



Datos:

$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\frac{25}{36}=\frac{r_1^2}{r_2^2}\ \rightarrow\ r_1=5K\ \text{ y }\ r_2=6K$$

En el $\triangle ATP$

$AP=13K$

$\rightarrow\ r_3=4K$

$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_3}=\frac{25}{\mathbb{A}_3}=\frac{r_1^2}{r_3^2}$$

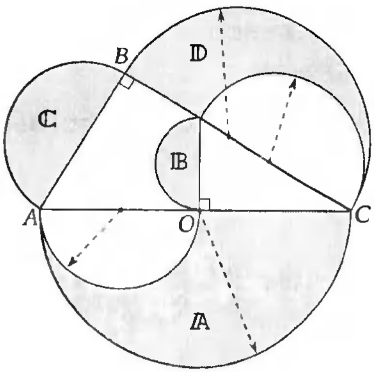
$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_3}=\frac{(5K)^2}{(4K)^2}\ \rightarrow\ \frac{25}{\mathbb{A}_3}=\frac{25}{16}$$

$\therefore\ \mathbb{A}_3=16$ u^2

Clave **B**

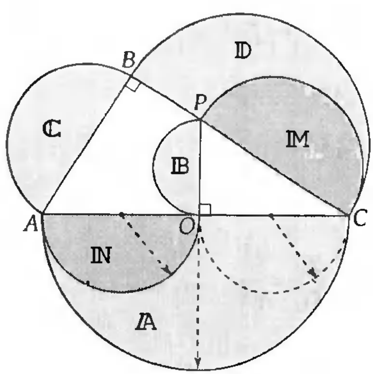
PROBLEMA N.° 57

En el gráfico mostrado, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}=10\pi\ u^2$, indique $\mathbb{A}$.



A) $5\pi\ u^2$ B) $8\pi\ u^2$ C) $9\pi\ u^2$
D) $10\pi\ u^2$ E) $15\pi\ u^2$

Resolución



De las propiedades de lúnulas:

en el $\triangle ABC$: $\mathbb{A}+\mathbb{N}=\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{M}$ (I)

pero $AO=OC$, entonces en el $\triangle POC$:

$\mathbb{M}=\mathbb{B}+\mathbb{N}$ (II)

Reemplazamos (II) en (I)

$$\mathbb{A}+\mathbb{N}=\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{B}+\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}=\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{B}$$

Pero $\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{B}=10\pi\ u^2$

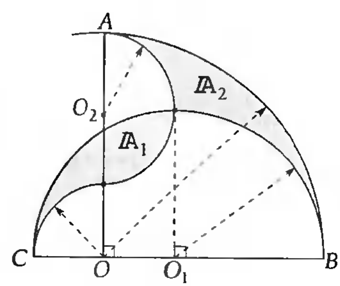
$\therefore\ \mathbb{A}=10\pi\ u^2$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 58

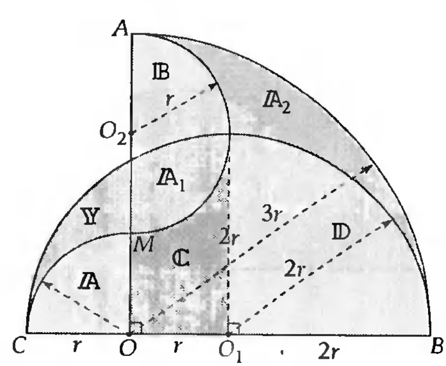
En el gráfico, calcule el área $\mathbb{A}_1$, si el área $\mathbb{A}_2$ es $\dfrac{4(13\pi-8)}{\pi-2}\ u^2$. Considere que $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ son las áreas de las regiones sombreadas.

A) $8\ u^2$
B) $12\ u^2$
C) $16\ u^2$
D) $18\ u^2$
E) $24\ u^2$



Resolución

Si $\mathbb{A}_2=\dfrac{4(13\pi-8)}{\pi-2}$



Tenemos

$$BO_1=CO_1=2r$$

En el gráfico:

$$\mathbb{A}_1+\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{D}=\frac{\pi(2r)^2}{2}=2\pi r^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{A}_1=\frac{\pi(2r)^2}{4}=\pi r^2 \qquad \text{(II)}$$

$$\mathbb{A}_1-\mathbb{Y}+\mathbb{B}=\frac{\pi r^2}{2} \qquad \text{(III)}$$

$$\mathbb{A}_1-\mathbb{Y}+\mathbb{B}+\mathbb{A}_2+\mathbb{C}+\mathbb{D}=\frac{\pi(3r)^2}{2} \qquad \text{(IV)}$$

De (I), (II), (III) y (IV)

$$\mathbb{D}=\pi r^2 \quad \text{y} \quad \mathbb{A}_2+\mathbb{C}=3\pi r^2$$

Pero

$$\mathbb{C}=2r^2-\frac{\pi r^2}{4}$$

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_2=r^2\left(\frac{13\pi}{4}-2\right)=\frac{r^2}{4}(13\pi-8)$$

Como

$$\mathbb{A}=\frac{\pi r^2}{4}$$

$$\mathbb{A}_1=\pi r^2-(\mathbb{A}+\mathbb{C})=\pi r^2-2r^2=r^2(\pi-2)$$

Del dato:

$$\frac{r^2}{4}(13\pi-8)=4\frac{(13\pi-8)}{\pi-2}$$

$$r^2=\frac{16}{\pi-2}$$

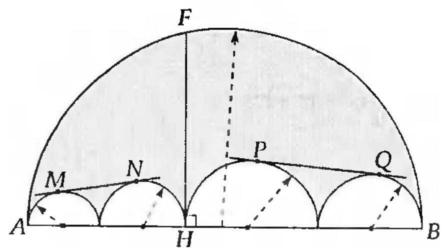
$$\rightarrow \quad r^2(\pi-2)=16\ \text{u}^2$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_1=16\ \text{u}^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 59

Determine el área de la región sombreada, si $a^2+b^2+c^2=16$; $MN=a$, $FH=b$ y $PQ=c$. Considere que A, M, N, H, P, Q y B son puntos de tangencia.

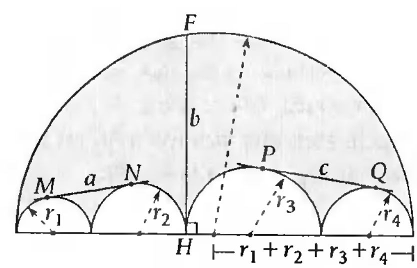


A) 16π B) 8π

C) 4π

D) 9π E) 5π

Resolución



Por propiedad:

$$2\sqrt{r_1 r_2}=a \quad \rightarrow \quad 4r_1 r_2=a^2$$

$$2\sqrt{r_3 r_4}=c \quad \rightarrow \quad 4r_3 r_4=c^2$$

$(2r_1+2r_2)(2r_3+2r_4)=b^2$, entonces

$$4(r_1+r_2)(r_3+r_4)=b^2$$

Sea $\mathbb{A}$: área de la región sombreada, luego

$$\mathbb{A}=\frac{\pi}{2}(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-\frac{\pi}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2)$$

$$\mathbb{A}=\pi(\underbrace{r_1\,r_2}_{\frac{a^2}{4}}+\underbrace{r_3\,r_4}_{\frac{c^2}{4}}+\underbrace{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}_{\frac{b^2}{4}})$$

$$\mathbb{A}=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

pero

$$a^2+b^2+c^2=16$$

$\therefore\ \mathbb{A}=4\pi$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 60

En un triángulo equilátero ABC, de lado $4\sqrt{3}$ m, se traza la altura AM. Luego, con centro en A y radio AM, se traza un arco que interseca a $\overline{AC}$ en R. Si después, con centro en C y radio CM, se traza un arco que interseca a $\overline{AC}$ en S, halle el área de la región mixtilínea MSR.

A) $(5\pi-3\sqrt{3})$ m^2

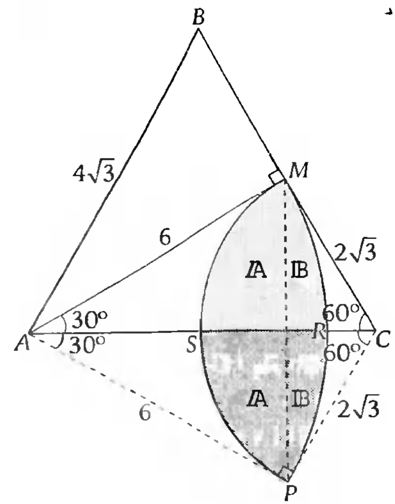
B) $(5\pi-4\sqrt{3})$ m^2

C) $(5\pi-6\sqrt{3})$ m^2

D) $(6\pi-5\sqrt{3})$ m^2

E) $(6\pi-4\sqrt{3})$ m^2

Resolución



Se prolongan los arcos MS y MR, tal que su intersección sea P.

$$2\mathbb{B}=\mathbb{A}_{\triangleleft AMP}-\mathbb{A}_{\triangle AMP}$$

$$2\mathbb{B}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{6^2}{2}-\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\ \rightarrow\ 2\mathbb{B}=6\pi-9\sqrt{3}$$

$$2\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\triangleleft CMP}-\mathbb{A}_{\triangle MCP}$$

$$2\mathbb{A}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{(2\sqrt{3})^2}{2}-\frac{(2\sqrt{3})^2\operatorname{sen}60°}{2}$$

$$2\mathbb{A}=4\pi-3\sqrt{3}$$

Luego

$$2(\mathbb{A}+\mathbb{B})=10\pi-12\sqrt{3}$$

$\therefore\ \mathbb{A}+\mathbb{B}=(5\pi-6\sqrt{3})\,\text{m}^2$

Clave **C**

Las figuras geométricas como algo tangible no existen. Las formas que el hombre ha ideado (representaciones) son simplemente abstracciones que nos ayudan a interpretar la realidad. El concepto de círculo y de triángulo existe en nuestra mente, y conocerlos le ha permitido a la humanidad construir un sinnúmero de sólidas edificaciones, signo del ingenio humano y de su capacidad creativa para alterar lo real. Por ello, consideramos a la geometría como una de las ciencias más antiguas de la humanidad que nos sirve como vía para entender el universo que nos rodea.

Solucionario Geometría, una visión de la planimetría es un texto indispensable para el conocimiento, práctica y análisis de la geometría. En él encontrarás lo siguiente:

- ✓ Solucionario de los problemas propuestos en el libro *Geometría, una visión de la planimetría.*
- ✓ Preguntas tipo examen de admisión de diferentes universidades e instituciones educativas.
- ✓ Más de 400 preguntas desarrolladas.
- ✓ Gráficos que ayudan a la mejor comprensión de los problemas propuestos.
- ✓ Herramientas didácticas para el dominio de los temas de geometría.

ISBN: 978-612-4036-74-3

www.elumbreras.com.pe